জ্যামিতি-প্রবেশ

দ্বিতীয় ভাগ

সপ্তম শ্রেণীর জন্য

এ. আই. এম. টি.

ম্যাকমিলান

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ প্রবর্তিত জ্যামিতির পাঠ্যসূচী অনুসারে
সপ্তম শ্রেণীর জন্য লিখিত।

জ্যামিতি-প্রবেশ

(দ্বিতীয় ভাগ)

(সপ্তম শ্রেণীর জন্য)

এ. আই. এম. টি., কলিকাতা
A. I. M. T. (Calcutta)

(Association for Improvement of Mathematics Teaching)

ম্যাকমিলান কোম্পানী অফ ইণ্ডিয়া লিমিটেড
294 বিপিন বিহারী গাঙ্গুলী স্ট্রীট, কলিকাতা-12
1975

THE MACMILLAN COMPANY OF INDIA LTD.
MADRAS CALCUTTA BOMBAY DELHI
Associate companies throughout the world

First Edition 1975

Made in India

Printed by Bankim Behari Das at Orient Press
123/1, Acharya Prafulla Chandra Road, Calcutta 6 and
Published by U. N. Banerjee, for The Macmillan Company of
India Ltd., 294 B. B. Ganguly Street, Calcutta-12

ভূমিকা

নতুন পাঠ্যসূচী অনুযায়ী অভিনব পাঠ্যপুস্তক রচনা দুরূহ কর্ম হওয়া সত্ত্বেও এই সংস্থা তাহার আদর্শানুযায়ী পুস্তক রচনায় ব্রতী হইয়া পূর্ববর্তী বৎসর ষষ্ঠ শ্রেণীর (১) গণিত-প্রকাশ, (২) জ্যামিতি-প্রবেশ এবং নবম শ্রেণীর (৩) মাধ্যমিক গণিত, (৪) মাধ্যমিক জ্যামিতি রচনা করিয়াছে। চলতি বৎসরে সপ্তম শ্রেণীর জন্য জ্যামিতি-প্রবেশ এবং দশম শ্রেণীর জন্য মাধ্যমিক গণিত ও মাধ্যমিক জ্যামিতি প্রণীত হইল।

আশা করা যায় বর্তমান কাঠামোর চৌহদ্দির মধ্যে গণিত শিক্ষার উৎকর্ষ সাধনে এই সংস্থা কর্তৃক রচিত গণিত পুস্তকগুলি ছাত্রসমাজকে বিশেষ সাহায্য করিবে।

প্রসঙ্গত উল্লেখ্য এই যে, এই ধরনের যৌথ প্রয়াসে পুস্তক প্রণয়ন পশ্চিমবঙ্গে অভিনব। যাঁহারা এই পুস্তকগুলি রচনায় অংশগ্রহণ করিয়াছেন তাঁহারা সকলেই বিশেষভাবে ধন্যবাদার্হ।

সম্পাদকমণ্ডলীর সদস্যগণ যে অকৃপণ উপদেশ দান করিয়াছেন তাহার জন্য আমাদের সংস্থা চিরকৃতজ্ঞ। এই সুযোগে আমাদের প্রকাশক ও তাঁহাদের কর্মীবৃন্দকে ধন্যবাদ জ্ঞাপন করিতেছি।

পরিশেষে, আমাদের সংস্থা আশা করে, সমগ্র শিক্ষকসমাজ ও ছাত্রসমাজে এই পুস্তকগুলি সমাদৃত হইবে। পুস্তকগুলির সমৃদ্ধি ও উৎকর্ষের জন্য যে-কোন প্রকার উপদেশ আমরা সাদরে গ্রহণ করিব। ইতি—

সাধারণ সচিব

25, ফার্ন রোড, কলিকাতা-19

এ. আই. এম. টি.

Association for Improvement of Mathematics Teaching

SYLLABUS IN GEOMETRY

For Class VII

The aim of teaching Geometry at this stage is to make the pupils gradually familiar with geometrical properties informally through activity.

1. (i) Simple ideas of translation and rotation by objects found in daily life—their properties.

   (ii) Idea of rotational symmetry in geometrical figures like equilateral triangle, parallelogram ; circle etc.

   (iii) Composition of transformations ; congruence.

2. Constructions :

   (i) Angle congruent to a given angle.

   (ii) Constructions of triangles with given parts.

   (iii) Constructions of quadrilaterals with given parts,

সূচীপত্র

তৃতীয় অধ্যায়

রূপান্তর (transformation), রূপান্তরের সংযুক্তি (composition of transformations), সর্বসম চিত্র (congruent figures)

চতুর্থ অধ্যায়

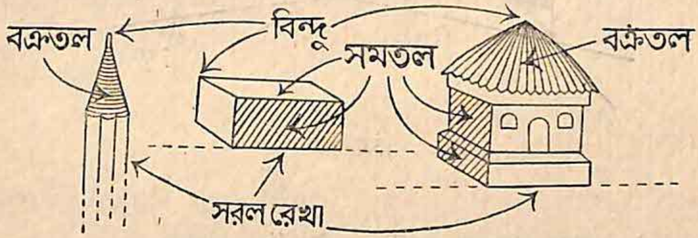
সম্পাদ্য অঙ্কন

প্রথম অধ্যায়

অধীত বিষয়ের পুনরুল্লেখ

I. বিন্দু, সরলরেখা ও তল :

বিন্দু, সরলরেখা ও তল সম্বন্ধে তোমাদের ধারণা আছে। আমাদের দৈনন্দিন জীবনে দেখা নানা বস্তুর আকৃতি থেকে বিন্দু, সরলরেখা, তলের উদাহরণ দিতে পারি। দেখ, নীচের চিত্রে (চিত্র—1) বিন্দু, সরলরেখা ও তল দেখান হয়েছে :

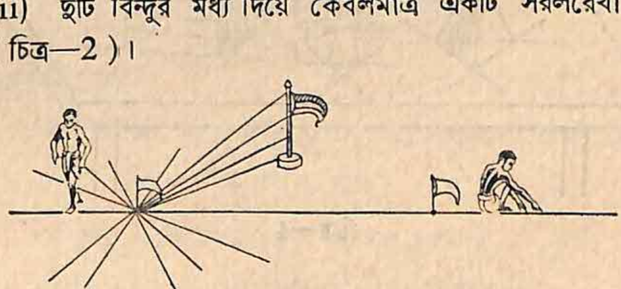


চিত্র—1

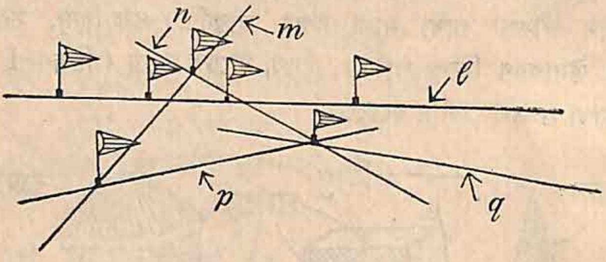
বিন্দু, সরলরেখা ও তলের মধ্যে পরস্পর সম্পর্কগুলি তোমরা জেনেছ। সেগুলি আবার উল্লেখ করা হচ্ছে।

(i) একটি বিন্দুর মধ্য দিয়ে খুশীমত অসংখ্য সরলরেখা টানা যায় (চিত্র—2)।

(ii) ছুটি বিন্দুর মধ্য দিয়ে কেবলমাত্র একটি সরলরেখা টানা যায় (চিত্র—2)।

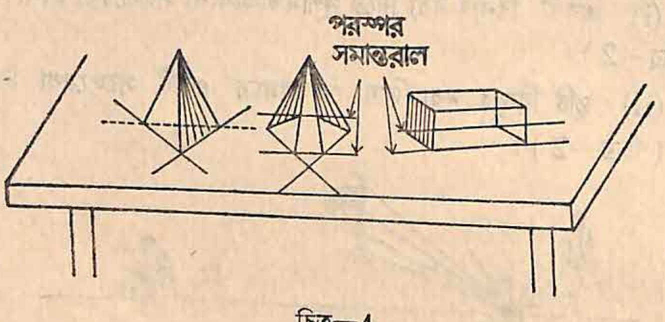


(iii) তিন বা তার অধিক বিন্দু সমরেখ হতেও পারে বা নাও হতে পারে (চিত্র—3)।



চিত্র—3

(iv) কোন সমতলে অবস্থিত দুটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করতে পারে বা ছেদ নাও করতে পারে। যখন সরলরেখা দুটি পরস্পর ছেদ করে না, তখন তাদের পরস্পর সমান্তরাল বলা হয় (চিত্র—4)।



চিত্র—4

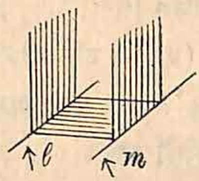
(v) তিন বা তার অধিক সরলরেখা সমবিন্দু হতে পারে বা নাও হতে পারে।

(vi) একটি সরলরেখা কোন সমতলকে একটি বিন্দুতে ছেদ করতে পারে বা নাও ছেদ করতে পারে।

(vii) একটি সরলরেখার দুটি বিন্দু যে সমতলে অবস্থিত সরলরেখাটিও সমগ্ররূপে সেই সমতলে অবস্থান করে।

[মনে রেখ, সমতল চতুর্দিকে বিস্তৃত করলে সমতলই পাওয়া যায়।]

(viii) দুটি সমতল একটি সরলরেখায় ছেদ করতে পারে বা নাও ছেদ করতে পারে (চিত্র—5)।



চিত্র—5

II. প্রতিফলন ও প্রতিসাম্য

'প্রতিফলন' ও 'প্রতিসাম্য'—এদের কোনটিই তোমাদের অজানা নয়। প্রতিফলন-প্রক্রিয়া কি করে কাগজ ভাঁজ করে বোঝা যেতে পারে তা তোমরা জেনেছ এবং তারই সাহায্যে কোন সমতলে সামতলিক জ্যামিতিক চিত্রের প্রতিফলন সম্বন্ধীয় আলোচনাও করা হয়েছে। তখন প্রতিফলনের কতগুলি বিশেষ ধর্ম উল্লেখ করা হয়েছিল। নীচে ঐ ধর্মগুলির পুনরুল্লেখ করা হল।

প্রতিফলনের ধর্ম ঃ

(i) কোন নির্দিষ্ট প্রতিফলন-রেখায় প্রতিফলনে একটি বিন্দুর কেবলমাত্র একটি প্রতিবিম্ব-বিন্দু পাওয়া যায়।

(ii) বস্তু-দূরত্ব ও প্রতিবিম্ব-দূরত্ব পরস্পর সমান।

(iii) যদি $l(\text{A}) = \text{A}'$ হয়, তবে $l(\text{A}') = \text{A}$ হবে।

(iv) প্রতিফলন-রেখা তলটিকে যে দুই অংশে ভাগ করে তার

যে-কোন এক অংশের সকল বিন্দুর জন্য অপর অংশে প্রতিবিম্ব-বিন্দু পাওয়া যায়।

(v) কোন বিন্দু ও তার প্রতিবিম্ব-বিন্দু-সংযোজক রেখা স্থির থাকে, কিন্তু ঐ রেখাস্থিত সব বিন্দুগুলিই ঐ নির্দিষ্ট প্রতিফলনের জন্য স্থির নয়।

(vi) প্রতিফলন-রেখার সমস্ত বিন্দুগুলি স্থিরবিন্দু অর্থাৎ ঐ রেখাটিও স্থির।

(vii) যদি P বিন্দু A এবং B বিন্দুর অন্তর্বর্তী হয়, তবে কোন রেখা l-এ প্রতিফলনের ফলে l(P) বিন্দুটিও l(A) এবং l(B)-এর অন্তর্বর্তী হবে।

(viii) সমরেখ বিন্দুগুলির প্রতিবিম্ব-বিন্দুগুলি সমরেখ।

(ix) সরলরেখার প্রতিবিম্ব একটি সরলরেখা।

(x) কোন রেখাংশ ও তার প্রতিবিম্ব-রেখাংশ পরস্পর সর্বসম।

(xi) প্রতিফলনের ফলে কোণের পরিমাণ অপরিবর্তিত থাকে, কিন্তু দিক্‌স্থিতি (orientation) বিপরীতমুখী হয়।

এবার প্রতিসাম্য সম্বন্ধে কিছু পুনরালোচনা করা হচ্ছে। তোমরা জেনেছ যে কিছু কিছু জ্যামিতিক চিত্রের ক্ষেত্রে এক বা একাধিক এমন প্রতিফলন-রেখা পাওয়া যায় যে ঐ রেখায় প্রতিফলনের জন্য চিত্রস্থিত বিন্দুগুলি স্থান পরিবর্তন করা সত্ত্বেও সমগ্র চিত্রটি স্থান পরিবর্তন করে না, অর্থাৎ সমগ্র চিত্রটি স্থির থাকে। যেমন l(A) = A, l(B) = B′, l(E) = E′, l(C) = C, l(D) = D′ (চিত্র—6); কিন্তু l রেখায় প্রতিফলনের ফলেও সমগ্র চিত্রটি স্থান পরিবর্তন করেনি। জ্যামিতিক চিত্রের এই বিশেষ ধর্মকে প্রতিসাম্য বলি। এই



চিত্র—6

ধর্মবিশিষ্ট জ্যামিতিক চিত্রকে **প্রতিসম চিত্র** বলে থাকি এবং ঐ বিশেষ প্রতিফলন-রেখাকে চিত্রের **প্রতিসম রেখা** বলি।

তোমরা কাগজ ভাঁজ করে নীচের সত্যগুলি যাচাই করে জেনে নিয়েছ :—

(i) দুটি বিন্দুর একটি প্রতিসম রেখা আছে।

(ii) কোন রেখাংশের দুটি প্রতিসম রেখা আছে।

[একটি প্রতিসম রেখা রেখাংশের লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক এবং অপরটি রেখাংশটি যে রেখার অংশ সেই রেখায় অবস্থিত।]

(iii) প্রতি কোণের একটি প্রতিসম রেখা আছে।

(iv) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের একটি প্রতিসম রেখা আছে।

(v) আয়তক্ষেত্রের দুটি প্রতিসম রেখা আছে।

(vi) সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি প্রতিসম রেখা আছে।

(vii) বর্গক্ষেত্রের চারটি প্রতিসম রেখা আছে।

(viii) বৃত্তের অসংখ্য প্রতিসম রেখা আছে।

অনুশীলনী 1.

1. $\triangle ABC$ আঁক ; কাগজ ভাঁজ করে l, m, n এমন তিনটি প্রতিফলন-রেখা নির্ণয় কর যেন $l(A) = B$, $m(B) = C$ এবং $n(C) = A$ হয়।

l, m, n রেখা তিনটি কি সমবিন্দু হয়েছে ?

2. (a) P, Q, R পর পর তিনটি সমরেখ বিন্দু নাও। কাগজ ভাঁজ করে l, m এমন দুটি প্রতিফলন-রেখা নির্ণয় কর যেন, $l(P) = Q$, এবং $m(Q) = R$ হয়।

(b) A, B, C পর পর তিনটি সমরেখ বিন্দু নাও। কাগজ ভাঁজ করে l, m এমন দুটি প্রতিফলন রেখা নির্ণয় কর যেন, $l(A)=C$ এবং $m(C)=B$ হয়।

3. নিম্নলিখিত বিবৃতিগুলির যেগুলি ঠিক তার পাশে √ চিহ্ন দাও এবং যেগুলি ভুল সেগুলি ঠিক করে লেখ :

(i) একটি বিন্দু দিয়ে কেবলমাত্র একটি সরলরেখা টানা যায়।

(ii) দুটি বিন্দু সর্বদা সমরেখ নাও হতে পারে।

(iii) তিনটি বিন্দু সমরেখ হতেও পারে বা নাও হতে পারে।

(iv) দুটি সরলরেখা পরস্পর একাধিক বিন্দুতে ছেদ করে।

(v) দুটি সমতল একটি রেখায় ছেদ করে।

(vi) একটি সরলরেখা সমতলকে একটি বিন্দুতে ছেদ করতেও পারে বা ছেদ নাও করতে পারে।

(vii) একটি সরলরেখার দুটি বিন্দু যে সমতলে অবস্থিত সরলরেখাটি সমগ্র-ভাবে সেই তলে অবস্থান করে না।

(viii) একটি বিন্দু ও তার প্রতিবিম্বের সংযোজক রেখা স্থির থাকে না, কিন্তু ঐ সংযোজক রেখার সমস্ত বিন্দু স্থির থাকে।

(ix) সমরেখ বিন্দুগুলির প্রতিবিম্ব-বিন্দুগুলিও সমরেখ হয়।

(x) প্রতিফলনের ফলে কোন কোণের পরিমাণ পরিবর্তিত হয়, কিন্তু দিক্‌স্থিতির (orientation) পরিবর্তন ঘটে না।

(xi) কোন জ্যামিতিক চিত্রকে l রেখা এমন দুটি অংশে বিভক্ত করে যে l (এক অংশের চিত্র) = অপর অংশের চিত্র, তখন চিত্রটিকে প্রতিসম চিত্র বলা হয়।

(xii) কোন জ্যামিতিক চিত্রে l এমন রেখা পাওয়া গেল যে প্রতিফলনের ফলে সমগ্র চিত্রটি কোনরূপে স্থানান্তরিত হল না, তবে চিত্রটি প্রতিসম চিত্র হবে না।

(xiii) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের দুটি প্রতিসম রেখা আছে।

(xiv) সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি প্রতিসম রেখা আছে।

(xv) আয়তক্ষেত্রের চারটি প্রতিসম রেখা আছে।

(xvi) বর্গক্ষেত্রের চারটি প্রতিসম রেখা আছে।

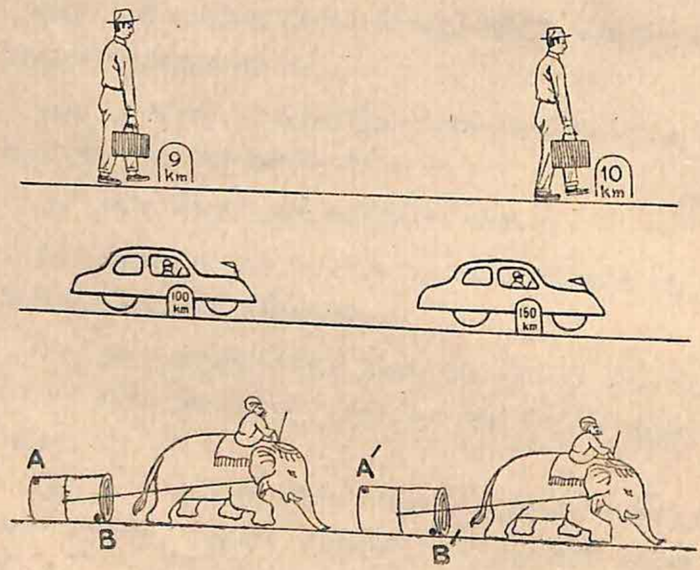
(xvii) বৃত্তের অসংখ্য প্রতিসম রেখা আছে।

দ্বিতীয় অধ্যায়

চলন (Translation), ঘূর্ণন (Rotation), ঘূর্ণনজাত প্রতিসাম্য (Rotational symmetry)

1. চলন (Translation) সম্বন্ধে ধারণা

কোন বস্তু এক স্থান থেকে অন্য স্থানে যাওয়া শুরু করলে আমরা সাধারণ কথায় বলে থাকি যে বস্তুটি চলতে শুরু করেছে। যেমন, বলে থাকি ট্রাম-বাস চলতে শুরু করেছে, লোকজন চলতে শুরু করেছে। আবার কখনো বলি, কোন একটি বস্তুকে ঠেলে চালানো (বা সরানো) হচ্ছে, ইত্যাদি। এই গতি বা চলন সম্পর্কে আরো একটু বিশদ আলোচনা করা যায়। নীচের চিত্রগুলি দেখ :



চিত্র—7

যদি ভদ্রলোকটি, গাড়ীটি, কাঠের গুড়িটি সরলরেখায় চলে থাকে তবে বলা যেতে পারে যে :

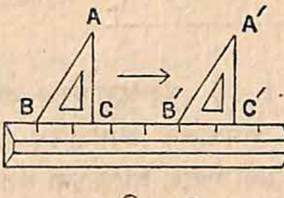
* ভদ্রলোকটির টুপিটা **যত দূরে** এবং **যে দিকে** সরেছে ব্যাগটিও ঠিক **তত দূরে** এবং **সে দিকে** সরেছে।

* গাড়ীর ড্রাইভার **যত দূরে** এবং **যে দিকে** গেছে পতাকাটিও **তত দূরে** এবং **সে দিকে** গেছে।

* কাঠের গুড়িটির A বিন্দু **যে দিকে যতটা** সরেছে B বিন্দুও **সে দিকে ঠিক ততটা** সরেছে।

উল্লিখিত ধর্ম বা সত্য আমরা এখন কাগজের তলের উপর পরীক্ষা দ্বারা যাচাই করে নিতে পারি।

পরীক্ষা : সাদা কাগজের উপর একটি রুলার বসাও (চিত্র—৪)। একটি ত্রিকোণীর যে-কোন এক পাশ রুলারের এক পাশ বরাবর বসিয়ে ত্রিকোণীর কৌণিক বিন্দু তিনটিকে কাগজের উপর A, B, C দিয়ে চিহ্নিত কর। এবার ত্রিকোণীর BC বাহু রুলারের সঙ্গে লাগিয়ে রুলার বরাবর ত্রিকোণীটি সরিয়ে এনে রাখ। ত্রিকোণীর দ্বিতীয় অবস্থানে ত্রিকোণীর কৌণিক বিন্দুগুলিকে A′, B′, C′ (যেমন—চিত্রে দেখানো হয়েছে) দিয়ে কাগজের উপর চিহ্নিত কর। AA′, BB′, CC′-এর দৈর্ঘ্য মাপ।



চিত্র—৪

এখন বলা যেতে পারে—

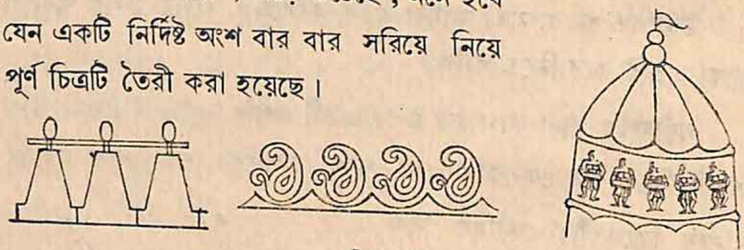
(i) ত্রিকোণী ABC চলনের ফলে A′B′C′ স্থানে স্থানান্তরিত হয়েছে।

(ii) ত্রিকোণীটি যেদিকে সরেছে বিন্দুগুলিও সেদিকে সরেছে।

(iii) ত্রিকোণীটি যত দূরে সরেছে প্রতিটি বিন্দুও তত দূরে সরেছে।

এই ধর্মগুলি বজায় রেখে কোন বস্তু যদি এক স্থান থেকে অন্য স্থানে চালিত হয় তবে জ্যামিতির ভাষায় এই স্থানান্তর-প্রক্রিয়াকে আমরা চলন (Translation) বলব।

চারদিকে আমরা যে-সমস্ত বস্তু, নক্সা, চিত্র, স্থাপত্য-শিল্প ইত্যাদি দেখি (চিত্র—9) সেগুলির অনেকের মধ্যে লক্ষ্য করলে দেখা যাবে যে বস্তুর (বা চিত্রের, বা নক্সার) কোন একাংশের পুনরাবৃত্তির ফলে পূর্ণ বস্তুটি (বা চিত্রটি বা নক্সাটি) গড়ে উঠেছে ; মনে হবে যেন একটি নির্দিষ্ট অংশ বার বার সরিয়ে নিয়ে পূর্ণ চিত্রটি তৈরী করা হয়েছে।

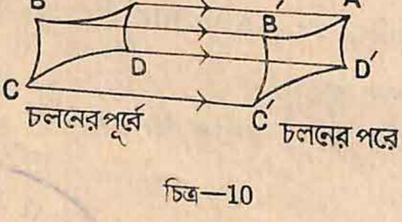


চিত্র—9

1. (a) **সমতলে চলন-প্রক্রিয়া সম্বন্ধীয় আলোচনা**

সামতলিক জ্যামিতির ক্ষেত্রে চলন বা স্থানান্তরের এই বিশেষ প্রক্রিয়া সম্বন্ধে আলোচনা করব।

ধরা যাক, কোন সমতলে জ্যামিতিক চিত্র ABCDকে চলনের ফলে A′B′C′D′ চিত্রে স্থানান্তরিত করা হল (চিত্র—10)।

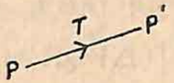


চিত্র—10

চলনের ফলে A, B, C, D,···বিন্দুগুলির নূতন অবস্থান A′, B′, C′, D′,···বিন্দুগুলি পাওয়া গেল। লক্ষ্য কর, AA′, BB′, CC′, DD′,···দূরত্বগুলি পরস্পর সমান। চলনের ফলে A, B, C, D,··· বিন্দুগুলির প্রত্যেকটি একই দিকে এবং একই দূরত্বে স্থানান্তরিত হয়েছে।

প্রতিফলনের মত চলনের ক্ষেত্রেও A′, B′, C′, D′,··· বিন্দুগুলিকে ঐ চলন সাপেক্ষে যথাক্রমে A, B, C, D,······বিন্দুগুলির প্রতিবিম্ব বলতে পারি।

সুতরাং সমতলে P বিন্দুটিকে চলন দ্বারা P′-এ স্থানান্তরিত করা হলে বলব P′ বিন্দুটি ঐ চলন সাপেক্ষে P বিন্দুর প্রতিবিম্ব। কোন 'চলন'কে আমরা সাধারণতঃ T দ্বারা চিহ্নিত করব। প্রতীকের সাহায্যে লেখা হয় : T(P) = P′।



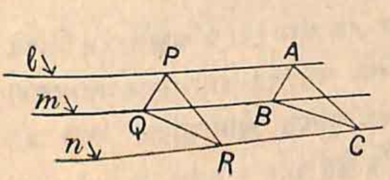
চিত্র—11

লক্ষ্য কর, চলনের সঙ্গে একটি **নির্দিষ্ট দিক** (P থেকে P′) এবং **দূরত্ব** (PP′) জড়িত আছে। চলনের (T) দিক ও দূরত্ব নির্দিষ্ট করার জন্য আমরা এক্ষেত্রে লিখব $\overrightarrow{PP'}$।

অনুশীলন : চিত্র—12 থেকে নীচের প্রশ্নগুলির উত্তর কর।

(i) PA, QB, RC এই দূরত্বগুলি সম্বন্ধে কি বলা যেতে পারে?

(ii) *l*, *m*, *n* সরলরেখাগুলি কি সমান্তরাল? (ত্রিকোণী ও রুলারের সাহায্য নাও।)



চিত্র—12

(iii) যদি মনে কর যে P বিন্দুকে A বিন্দুতে স্থানান্তরিত করা হয়েছে, তবে কি বলা যাবে যে Q, R বিন্দুদ্বয়ও ঐ একই দিকে একই দূরত্বে স্থানান্তরিত হয়েছে ?

দেখা যাবে যে,

(i) $PA = QB = RC$,

(ii) l, m, n অর্থাৎ PA, QB, RC পরস্পর সমান্তরাল।

(iii) P, Q, R বিন্দুগুলি একই দিকে একই দূরত্বে স্থানান্তরিত হয়েছে।

সুতরাং বলতে পারি, $\triangle PQR$-কে চলন দ্বারা $\triangle ABC$-তে স্থানান্তরিত করা হয়েছে। ঐ নির্দিষ্ট চলন যদি T দ্বারা চিহ্নিত করি, তবে লিখতে পারি $T(P) = A$, $T(Q) = B$, $T(R) = C$ অথবা $T(\triangle PQR) = \triangle ABC$।

উপরের আলোচনা থেকে সমতলে চলন প্রক্রিয়ার সম্বন্ধে দুটি ধর্ম বিবৃত করতে পারি :

(i) চিত্রের প্রতি বিন্দু এবং চলন সাপেক্ষে ঐ বিন্দুর প্রতিবিম্ব-সংযোজক রেখাংশগুলি পরস্পর সমান।

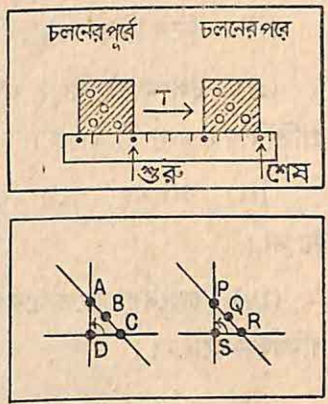
(ii) চলনের ফলে প্রতি বিন্দু যে-সব সরলরেখা বরাবর স্থানান্তরিত হয় সে সমস্ত সরলরেখাগুলি পরস্পর সমান্তরাল।

1. (b) চলন (Translation) :

কোন জ্যামিতিক চিত্রকে যখন এক স্থান থেকে অন্য স্থানে নির্দিষ্ট দিকে (অর্থাৎ চিত্রের প্রতিটি বিন্দু পরস্পার সমান্তরাল সরলরেখা বরাবর একই দিকে) এবং নির্দিষ্ট দূরত্বে স্থানান্তরিত করা হয় তখন ঐ স্থানান্তর-প্রক্রিয়াকে জ্যামিতির ভাষায় চলন (Translation) বলি। ঐ নির্দিষ্ট দিককে চলনের দিক এবং নির্দিষ্ট দূরত্বকে চলনের দূরত্ব বলি।

2. **চলনের বিভিন্ন ধর্ম ঃ** চলনের ধর্মগুলি আমরা সহজ পরীক্ষা দ্বারা বোঝার চেষ্টা করব।

পরীক্ষা 1 ঃ একখণ্ড চৌকো কার্ডবোর্ডের উপর A, B, C তিনটি সমরেখ বিন্দু এবং D অপর একটি বিন্দু নাও। ঐ চারটি বিন্দুতে চারটি ছিদ্র কর। এবার সাদা কাগজের উপর একটি রুলার ধরে তার এক পাশ বরাবর কার্ডবোর্ডের এক পাশ রেখে চলন (T) দিয়ে কার্ডবোর্ডটি স্থানান্তরিত (চিত্র—13) করা হল। এখন ঐ ছিদ্র চারটির মধ্য দিয়ে কাগজের উপর P, Q, R, S চারটি বিন্দু আঁক। কার্ডবোর্ডটি তুলে নাও।



চিত্র—13

এখানে $T(A)=P$, $T(B)=Q$, $T(C)=R$, $T(D)=S$;

লক্ষ্য কর ঃ—

(i) A, B, C সমরেখ বিন্দুগুলির প্রতিবিম্ব P, Q, R বিন্দুগুলিও সমরেখ। ABC রেখাটি, PQR রেখার সমান্তরাল।

(ii) B বিন্দু A ও C-এর অন্তর্বর্তী, এবং T (B) বিন্দুও T (A) ও T (C)-এর অন্তর্বর্তী।

(iii) $T(AB)=PQ$, $T(BC)=QR$, $T(AC)=PR$, $T(AD)=PS$, $T(DC)=SR$, এবং এও লক্ষণীয় যে—

$AB=PQ$, $BC=QR$, $AC=PR$,....ইত্যাদি।

(iv) $T(\angle DAC)=\angle SPR$, $T(\angle ACD)=\angle PRS$, $T(\angle CDA)=\angle RSP$ এবং এও লক্ষ্য কর যে,

$\angle DAC = \angle SPR$, $\angle ACD = \angle PRS$, $\angle CDA = \angle RSP$ এবং ওদের দিক্‌স্থিতি (orientation) অপরিবর্তিত আছে।

সিদ্ধান্ত :

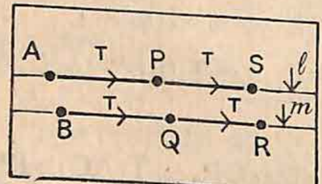
(i) চলনে বিন্দুর সমরেখ ধর্ম বজায় থাকে।

(ii) চলনে দুই বিন্দুর অন্তর্বর্তী বিন্দুর প্রতিবিম্ব পূর্বের দুই বিন্দুর প্রতিবিম্বের অন্তর্বর্তী থাকে।

(iii) চলনের ফলে বিন্দুগুলির পারস্পরিক দূরত্ব পরিবর্তিত হয় না।

(iv) চলনের ফলে কোণের পরিমাণ এবং উহার দিক্‌স্থিতির পরিবর্তন ঘটে না।

পরীক্ষা 2 : একটি কার্ডবোর্ডে দুটি বিন্দু A, Bতে দুটি ছিদ্র কর। পূর্বের ন্যায় সাদা কাগজের উপর রুলার স্থাপন করে নির্দিষ্ট দিকে ও নির্দিষ্ট দূরত্বে একবার চলন (T) দেওয়ার পর A, B বিন্দু দুটিকে P, Q বিন্দুতে স্থানান্তরিত কর। আবার P, Qকে ঐ নির্দিষ্ট চলন (T) দ্বারা S, R বিন্দুতে স্থানান্তরিত কর (চিত্র—14)। কার্ডবোর্ডটি তুলে, AP, PS এবং BQ, QR যুক্ত করলে দেখা যাবে যে A, P, S সমরেখ এবং B, Q, R সমরেখ। মনে কর, উহারা যথাক্রমে l এবং m রেখার উপর আছে। এখন যদি আবার S এবং Rকে ঐ নির্দিষ্ট চলন (T) দেওয়া যায় তবে দেখা যাবে যে S, R-এর প্রতিবিম্ব-বিন্দু যথাক্রমে l এবং m রেখার উপরই আছে।



চিত্র—14

অতএব লক্ষ্য করছি, কোন নির্দিষ্ট চলনের দিকের রেখাগুলি স্থির থাকছে। আরও লক্ষ্য কর যে প্রতিটি বিন্দু চলনের ফলে সরে যাচ্ছে।

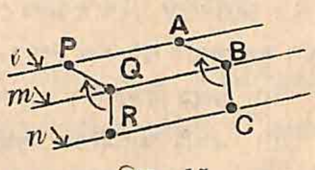
সিদ্ধান্ত ঃ

(i) চলনে স্থির রেখা আছে। চলনের দিকের রেখাগুলি স্থির।

(ii) চলনে কোন বিন্দু স্থির থাকে না।

অনুশীলন ঃ

(i) l, m, n তিনটি পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখা। P, Q, R বিন্দু তিনটি যথাক্রমে l, m, n-এর উপর অবস্থিত।



চিত্র—15

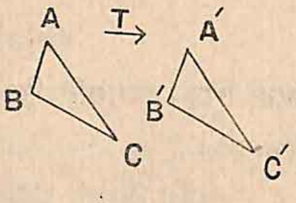
মনে কর, P, Q, R সমরেখ নয়। PQ এবং QR যুক্ত করে $\angle PQR$ উৎপন্ন কর। এখন l, m, n রেখার উপর যথাক্রমে A,B,C তিনটি এমন বিন্দু স্থাপন কর যেন $PA = QB = RC$ হয়। সুতরাং, বলা যেতে পারে, যে-কোন চলন (T)-এর ফলে $T(P) = A$, $T(Q) = B$, $T(R) = C$ হয়েছে। অর্থাৎ $T(\angle PQR) = \angle ABC$।

এখন চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখ যে,

$\angle PQR = \angle ABC$; এছাড়া কোণের দিক্‌স্থিতিরও কোন পরিবর্তন ঘটেনি তা লক্ষ্য করা যাচ্ছে।

অনুশীলনী 2A.

1. নীচের চিত্রটি খাতায় ট্রেস করে এঁকে নাও।



চিত্র—16

(i) AA', BB', CC' দৈর্ঘ্যগুলি কাঁটা-কম্পাস দিয়ে মেপে দেখাও উহারা পরস্পর সমান।

(ii) রুলার ও ত্রিকোণীর সাহায্যে দেখাও, AA', BB', CC' পরস্পর সমান্তরাল।

(iii) চলনের (T) প্রতীক দ্বারা উপরের চিত্রটি প্রকাশ কর।

2. নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তগুলির যেগুলি ঠিক তার পাশে ✓ চিহ্ন দাও এবং যেগুলি ভুল সেগুলি শুদ্ধ করে লেখ :—

(i) চলনে নির্দিষ্ট দিক ও দূরত্ব আছে।

(ii) একটি জ্যামিতিক চিত্রকে চলন দিয়ে স্থানান্তরিত করলে চিত্রের প্রতিটি বিন্দু একই দিকে সমান দূরত্বে স্থানান্তরিত হয়।

(iii) একটি জ্যামিতিক চিত্রকে চলন দিয়ে স্থানান্তরিত করলে চিত্রের বিন্দুগুলি অসমান্তরাল সরলরেখায় স্থানান্তরিত হয়।

(iv) চলনে স্থিরবিন্দু আছে, কোন স্থির সরলরেখা থাকে না।

(v) চলনে সমরেখ বিন্দুগুলি সর্বদা সমরেখ থাকে।

(vi) নির্দিষ্ট কোন চলনে কেবলমাত্র নির্দিষ্ট দিক থাকে।

(vii) চলনে কোণের পরিমাণ ও দিক্‌স্থিতি অপরিবর্তিত থাকে।

(viii) $T(A, B, C) = (A', B', C')$ হলে,

(a) $AB = A'B'$, (b) $AC > A'C'$, (c) AA', BB', CC' প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য সমান হবে, (d) AA', BB' সমান্তরাল, কিন্তু CC' উহাদের অসমান্তরাল।

3. ঘূর্ণন (Rotation) সম্বন্ধে ধারণা :

তোমরা সবাই ঘড়ির কাঁটা ঘুরতে দেখেছ। কাঁটা একটি বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘোরে, সেই সঙ্গে কাঁটার অন্যান্য বিন্দুগুলিও স্থান পরিবর্তন করে। আবার চরকা কাটাও দেখে থাকবে—সে ক্ষেত্রেও চরকাটি একটি বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘোরে, ফলে চরকার অন্যান্য বিন্দুগুলিও স্থান পরিবর্তন করে। কখনো যদি তুমি নাগরদোলায় চাপ তো দেখবে একটি বিন্দুকে কেন্দ্র করে অনবরত তোমার স্থান পরিবর্তন হচ্ছে। একটি বিন্দুকে কেন্দ্র করে জ্যামিতিতে বৃত্ত আঁকতে হয় তা তোমরা জেনেছ। সেখানে পরিধির উপর বিন্দুগুলি কেন্দ্র-বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘুরছে।



চিত্র—17

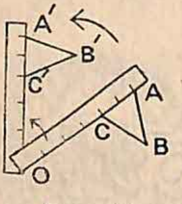
আমাদের অনেক উৎসবে আল্পনা দেওয়া হয়ে থাকে। ঐসব আল্পনায় দেখবে যে বিশেষ চিত্রের কিছু অংশের পুনরাবৃত্তি করা হয়েছে। মনে হয় চিত্রাংশটি বার বার ঘুরিয়ে নিয়ে এঁকে চিত্রটি সম্পূর্ণ করা হয়েছে।

দৈনন্দিন জীবনে আমাদের চারপাশে যে সমস্ত চিত্র, জ্যামিতিক আকার দেখি তার মধ্যে থেকে এই ধরনের উদাহরণ তোমরাও অনেক উল্লেখ করতে পারবে।

উপরের আলোচনা থেকে বলা যেতে পারে যে কোন বিন্দুর সাপেক্ষে একটি বস্তুকে (বা বিন্দুকে বা চিত্রকে) অপর স্থানে স্থানান্তরিত করা সম্ভব। জ্যামিতির ভাষায় এই স্থানান্তর-প্রক্রিয়াকে **ঘূর্ণন** (Rotation) বলব।

3(a). সমতলে ঘূর্ণন-প্রক্রিয়া সম্বন্ধীয় আলোচনা :

এবার সামতলিক জ্যামিতির ক্ষেত্রে ঘূর্ণন, এই বিশেষ স্থানান্তর-প্রক্রিয়া সম্বন্ধে আলোচনা করব।

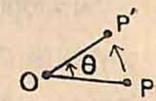


চিত্র—18

ধরা যাক, রুলারের এক পাশ ঘেঁযে কার্ড-বোর্ডের △ABC-এর এক বাহু বসিয়ে রুলারের O বিন্দুকে কেন্দ্র করে ত্রিভুজসহ রুলারটি কোন নির্দিষ্ট কোণে ঘুরিয়ে △ABC-কে △A′B′C′ স্থানে স্থানান্তরিত করা হল (চিত্র—18)। সুতরাং ঘূর্ণনের ফলে A, B, C,··· বিন্দুগুলি যথাক্রমে A′, B′, C′,···বিন্দুতে স্থানান্তরিত হয়েছে। লক্ষ্য কর, OA = OA′, OB = OB′, OC = OC′।

এখানে চলনের মত A′, B′, C′,···বিন্দুগুলিকে ঘূর্ণন সাপেক্ষে যথাক্রমে A, B, C,···বিন্দুগুলির প্রতিবিম্ব-বিন্দু বলব।

সুতরাং যদি O বিন্দুকে কেন্দ্র করে θ কোণে* ঘুরিয়ে কোন বিন্দু P-কে P′ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করা হয় এবং OP = OP′ হয়, তবে বলব যে এই ঘূর্ণন সাপেক্ষে P-এর প্রতিবিম্ব P′ (চিত্র-19)।



চিত্র—19

প্রতীকের সাহায্যে লেখা হয়—

$$O_{\theta}(P) = P',$$

O দ্বারা ঘূর্ণনের কেন্দ্র-বিন্দু, θ দ্বারা ঘূর্ণন-কোণের পরিমাণ ও দিক নির্দেশ করা হয়েছে।

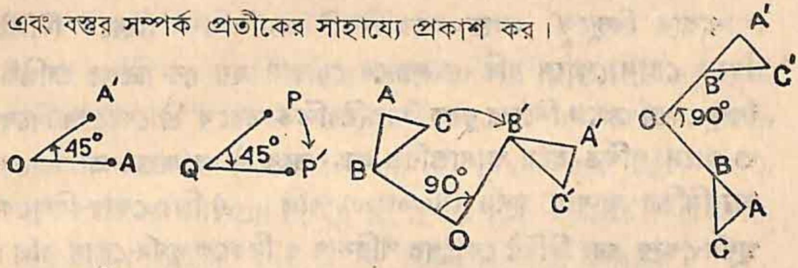
---

* θ-এর উচ্চারণ থিটা (Theta), এটি একটি গ্রীক চিহ্ন, এর দ্বারা কোণের যে-কোন পরিমাপ নির্দেশ করা হয়।

কোণের পরিমাপ নির্দেশ করার জন্য ϕ (উচ্চারণ ফাই : Phi)—এই গ্রীক চিহ্নটিও ব্যবহার করা হয়ে থাকে।

পূর্বক্ষেত্রে (চিত্র-18) প্রতীকের সাহায্যে লেখা যায় $O_\theta(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$, যদি ঘূর্ণন-কোণ θ হয়।

অনুশীলন :—নীচের চিত্রগুলি থেকে প্রতিবিম্ব এবং বস্তুর সম্পর্ক প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ কর।



(i) (ii) (iii) (iv)

চিত্র—20

এখানে লক্ষ্য কর, কোণের দিকগুলি কোনটি ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে সে দিকে এবং কোনটি তার বিপরীত দিকে নির্দেশিত আছে। প্রথম ক্ষেত্রে আমরা কোণগুলি ঋণাত্মক (−) এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ধনাত্মক (+) ধরে থাকি। সুতরাং প্রতীকের সাহায্যে উপরোক্ত চিত্রগুলি নিম্নরূপে প্রকাশ করা যাবে :—

(i) $O_{45^\circ}(A) = A'$, (ii) $Q_{-45^\circ}(P) = P'$,

(iii) $O_{-90^\circ}(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$,

(iv) $O_{90^\circ}(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$;

এখানে লক্ষণীয় যে চিত্রের প্রতিটি বিন্দু ঘূর্ণন-কোণের সমান কোণে ঘূর্ণিত হয়েছে। অর্থাৎ চিত্র—20-এর (iii) বা (iv) নং চিত্রে, $\angle AOA' = \angle BOB' = \angle COC' = 90^\circ$। এ ছাড়া লক্ষণীয় এই যে— $OA = OA'$, $OB = OB'$, $OC = OC'$।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ—প্রতি ঘূর্ণনের জন্য নির্দিষ্ট ঘূর্ণন-কেন্দ্র (centre of rotation) এবং ঘূর্ণন-কোণের (angle of rotation) পরিমাণ ও দিক থাকে।

3(b). ঘূর্ণন (Rotation) :

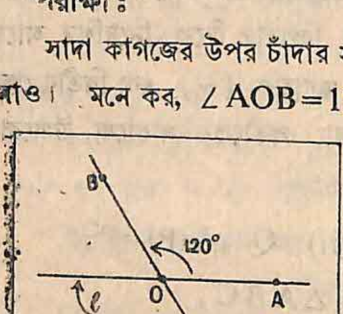
কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করে একটি জ্যামিতিক চিত্রকে নির্দিষ্ট দিকে কোন কোণে যদি এমনভাবে ঘোরান হয় যে চিত্রের প্রতিটি বিন্দু কেন্দ্র থেকে নিজের দূরত্ব অপরিবর্তিত রেখে ঐ কোণের দিকে ও মানে ঘূর্ণিত হয়ে স্থানান্তরিত হয়, তবে ঐ স্থানান্তর-প্রক্রিয়াকে জ্যামিতির ভাষায় ঘূর্ণন (Rotation) বলি। ঐ স্থির কেন্দ্র-বিন্দুকে ঘূর্ণন-কেন্দ্র এবং নির্দিষ্ট কোণের পরিমাণ ও দিককে ঘূর্ণন-কোণ বলি।

4. ঘূর্ণনের বিভিন্ন ধর্ম :

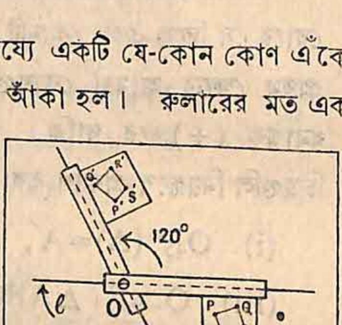
ঘূর্ণনের ধর্মগুলি আমরা সহজ পরীক্ষা দ্বারা বোঝবার চেষ্টা করব।

পরীক্ষা :

সাদা কাগজের উপর চাঁদার সাহায্যে একটি যে-কোন কোণ এঁকে নাও। মনে কর, $\angle AOB = 120^\circ$ আঁকা হল। রুলারের মত এক



(i)



(ii)

চিত্র—21

টুকরো কার্ডবোর্ড কেটে নাও এবং তার মাঝে দৈর্ঘ্য বরাবর একটি রেখা টান। আর একখণ্ড কার্ডবোর্ডের উপর একটি জ্যামিতিক

চিত্র, মনে করা যাক, চতুর্ভুজ PQRS আঁকা হল। রুলারের মত কার্ডবোর্ডটিকে এমনভাবে স্থাপন কর যেন রুলারের মাঝ বরাবর রেখাটি l রেখার উপর পড়ে (চিত্র—21-ii) এবং এমনভাবে একটি বোর্ডপিন্ এঁটে দাও যাতে O বিন্দুতে রুলারটি এঁটে যায়। এবার PQRS চতুর্ভুজ-আঁকা কার্ডবোর্ডটির এক পাশ রুলারের এক পাশ বরাবর স্থাপন কর। পিন্ দিয়ে কাগজের উপর P,Q,R,S-এর স্থান নির্ণয় করে নাও। এখন কার্ডবোর্ডটি রুলারসহ এমনভাবে ঘোরাও যাতে রুলারের মাঝ বরাবর রেখা m-রেখার সঙ্গে মিলে যায়। আবার পিনের সাহায্যে P, Q, R, S-এর স্থান কাগজের উপর নির্ণয় করে নাও। দ্বিতীয় অবস্থানে ঐ বিন্দুগুলির নাম যথাক্রমে P', Q', R', S' দাও।

এবার বলা যেতে পারে যে,

$O_{120°}$ (চতুর্ভুজ PQRS) = চতুর্ভুজ $P'Q'R'S'$, $O_{120°}(P) = P'$, $O_{120°}(Q) = Q'$, $O_{120°}(R) = R'$, এবং $O_{120°}(S) = S'$।

যদি P এবং Q-এর অন্তর্বর্তী কোন বিন্দু A (চিত্রে দেখানো হয়নি) নেওয়া হত তবে দেখা যেত যে ঘূর্ণনের পর A বিন্দুর প্রতিবিম্ব P' এবং Q'-এর অন্তর্বর্তী হচ্ছে। তখন লক্ষ্য করতে :

(i) সমরেখ বিন্দু P, A, Q-এর প্রতিবিম্ব, P', A', Q' বিন্দুগুলিও সমরেখ।

(ii) $O_{120°}(A)$ বিন্দুটিও $O_{120°}(P)$ ও $O_{120°}(Q)$-এর অন্তর্বর্তী।

(iii) $O_{120°}(PA) = P'A'$, $O_{120°}(AQ) = A'Q'$,
$O_{120°}(QR) = Q'R'$, $O_{120°}(RS) = R'S'$,
$O_{120°}(SP) = S'P'$ ইত্যাদি।

এবং এও লক্ষ্য করবে যে $PA = P'A'$, $AQ = A'Q'$

এবং $QR = Q'R'$, $RS = R'S'$, $SP = S'P'$ ইত্যাদি।

(iv) $O_{120^\circ}(\angle PQR) = \angle P'Q'R'$ এবং উভয়ের কোণের দিক্‌স্থিতি (orientation) একই।

অন্যান্য কোণগুলির ক্ষেত্রে ঐ একই বক্তব্য রাখা যায়।

(v) ঘূর্ণন-কেন্দ্র ভিন্ন সমস্ত বিন্দু এবং প্রতিটি সরলরেখা বা রেখাংশ (OP, OP′, OQ, OQ′,···PQ, QR···) স্থানান্তরিত হয়েছে।

সিদ্ধান্ত ঃ

(i) ঘূর্ণনে বিন্দুর সমরেখ ধর্ম বজায় থাকে।

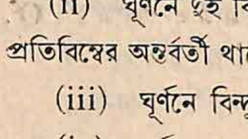
(ii) ঘূর্ণনে দুই বিন্দুর অন্তর্বর্তী বিন্দুর প্রতিবিম্ব পূর্বের দুই বিন্দুর প্রতিবিম্বের অন্তর্বর্তী থাকে।

(iii) ঘূর্ণনে বিন্দুগুলির পারস্পরিক দূরত্ব পরিবর্তিত হয় না।

(iv) ঘূর্ণনে কোন কোণের পরিমাণ ও ওর দিক্‌স্থিতির (orientation) পরিবর্তন ঘটে না।

(v) ঘূর্ণনে স্থিরবিন্দু (ঘূর্ণন-কেন্দ্র) আছে। কিন্তু কোন স্থির রেখা নেই।

অনুশীলন : 1. সাদা কাগজের উপর ত্রিকোণী OPQ (চিত্র—22) স্থাপন কর। মনে কর, ত্রিকোণীর পরস্পর লম্ব প্রান্তদ্বয় l এবং m রেখা বরাবর আছে। এখন O বিন্দুকে কেন্দ্র করে O_θ ঘূর্ণন দিয়ে ত্রিকোণীটিকে $OP'Q'$ স্থানে আনা হল। সুতরাং মনে কর l রেখা ঘূর্ণিত হয়ে l' রেখায় এবং m রেখা ঘূর্ণিত হয়ে m' রেখায় স্থানান্তরিত হল। এখন নির্ণয় কর m ও m'-এর মধ্যে কোণের পরিমাণ

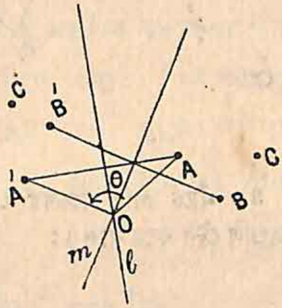


চিত্র—22

কত ? যদি ঐ কোণ ϕ হয় তবে চাঁদা দিয়ে মাপলে দেখবে যে θ এবং ϕ-এর পরিমাণ সমান।

2. মনে কর, কোন ঘূর্ণন দ্বারা A, B, C বিন্দু তিনটিকে A′, B′, C′ বিন্দুতে আনা হল (চিত্র—23)। ঘূর্ণনটি নির্ণয় করতে হবে।

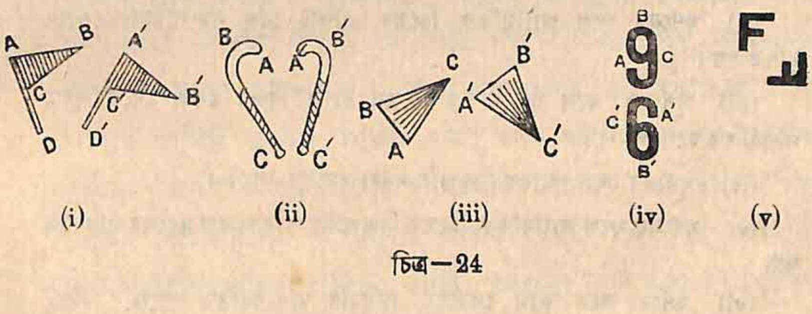
AA′, BB′ (বা CC′)-এর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক l এবং m আঁক (কাগজ ভাঁজ করে)। মনে কর, l, m পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। এখন দেখবে যে CC′-এর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকও O বিন্দু দিয়ে যাবে। O বিন্দুটি ঘূর্ণন-কেন্দ্র হবে। যদি $\angle AOA' = \theta$ হয় তবে লেখা যায় $O_\theta(A,B,C) = (A',B',C')$ বা $O_{-(360^\circ - \theta)}(A,B,C) = (A',B',C')$



চিত্র—23

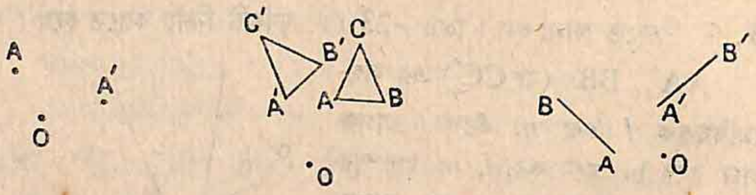
অনুশীলনী 2B.

1. চিত্র দেখে বল কোন কোন চিত্রে ঘূর্ণন প্রযোগ করা হয়েছে।



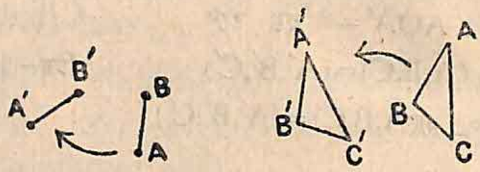
চিত্র—24

2. নীচে প্রতি চিত্রের ক্ষেত্রে O বিন্দুকে কেন্দ্র করে A, B, C,...... বিন্দুগুলির ঘূর্ণন সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব যদি A′, B′, C′,......হয় তবে সম্ভাব্য ঘূর্ণন-কোণ (যাহা চার সমকোণ অপেক্ষা ছোট) চাঁদার সাহায্যে নির্ণয় কর :—



চিত্র—25

3. নীচে প্রতি চিত্রের ক্ষেত্রে ঘূর্ণন-কেন্দ্রটি নির্ণয় কর (নিজের খাতায় চিত্রগুলি ট্রেস করে নাও) :



চিত্র—26

4. নিম্নলিখিত মন্তব্যের যেগুলি ঠিক তার পাশে ✓ চিহ্ন দাও এবং যেগুলি ভুল সেগুলি শুদ্ধ করে লেখ :—

(i) ঘূর্ণনে একটি স্থিরবিন্দু থাকে।

(ii) ঘূর্ণনের ফলে জ্যামিতিক চিত্রের প্রতিটি বিন্দু সম-পরিমাণ কোণে ঘূর্ণিত হয়।

(iii) ঘূর্ণনের ফলে জ্যামিতিক চিত্রের প্রতি বিন্দুর কেন্দ্র থেকে দূরত্ব পরিবর্তিত হতে পারে।

(iv) ঘূর্ণনের ফলে সমরেখ বিন্দুগুলি সর্বদা সমরেখ থাকে।

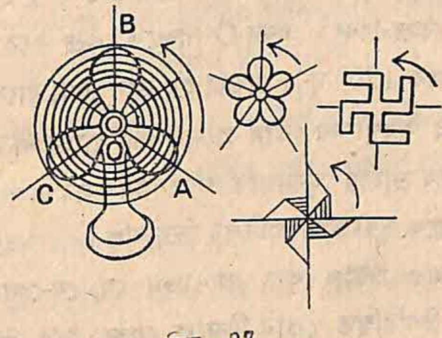
(v) ঘূর্ণনের ফলে জ্যামিতিক চিত্রের বিন্দুগুলির পারস্পরিক দূরত্বের পরিবর্তন ঘটে।

(vi) ঘূর্ণনের ফলে কোন কোণের পরিমাণ অপরিবর্তিত থাকে, কিন্তু দিক্‌স্থিতির পরিবর্তন ঘটে।

(vii) ঘূর্ণনের ফলে জ্যামিতিক চিত্রের দিক্‌স্থিতি (orientation) অপরিবর্তিত থাকে।

5. ঘূর্ণনজাত প্রতিসাম্য (Rotational Symmetry)

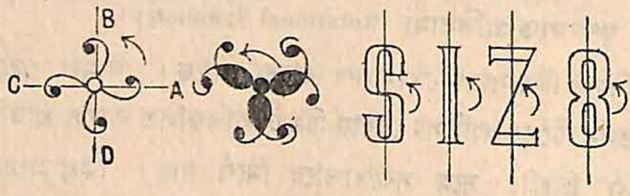
প্রতিসম চিত্র সম্বন্ধে তোমাদের ধারণা আছে। আমরা জেনেছি যে প্রতিসম চিত্রের প্রতিসম রেখায় চিত্রটি প্রতিফলিত করলে প্রতিবিম্ব-চিত্র মূল চিত্রটির সঙ্গে সর্বতোভাবে মিলে যায়। কিন্তু আমাদের চারদিকে এমন কিছু কিছু বস্তু বা চিত্র দেখি যাদের আকারে একটি বিশেষ ধরনের ধর্ম খুঁজে পাওয়া যায়। যেমন মনে কর, পাখা।



চিত্র—27

পাখার ব্লেড তিনটিকে এমনভাবে একবার বা দুবার ঘোরানো যায় যে, পাখা ঘোরার আগে এবং পরে পাখার ব্লেডগুলির অবস্থানের পার্থক্য পাওয়া যাচ্ছে না। অথবা অন্যভাবে বলা যেতে পারে যে পাখার প্রতিটি ব্লেডের আকার একই রকম এবং যেন একটি ব্লেডকে ঘুরিয়ে ঘুরিয়ে বাকী দুটি ব্লেডের স্থানে আনা হয়েছে। এই ধরনের মিল তোমরা বিভিন্ন ফুলের পাপড়িতে, স্বস্তিকা চিহ্নে, বাচ্চাদের খেলনায়, চক্র ইত্যাদিতে খুঁজে পাবে। এছাড়া এধরনের নানা নক্সা, আল্‌পনা, অক্ষর, সংখ্যা ইত্যাদি দেখে থাকবে।

এদের চিত্রগুলি (চিত্র—27-28) লক্ষ্য করলে দেখবে যে, একটি বিন্দুকে কেন্দ্র করে নির্দিষ্ট কোন কোণে ঘূর্ণন দিলে মূলচিত্র ও ঐ ঘূর্ণনের



চিত্র—28

পর প্রতিবিম্ব-চিত্রের মধ্যে কোন প্রভেদ নেই। পাখার চিত্রটি দেখ (চিত্র—27)। এক্ষেত্রে $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120°$ এবং O বিন্দু কেন্দ্র-বিন্দু। এখন O বিন্দুকে কেন্দ্র করে যদি যে-কোন দিকে ব্লেডগুলিকে 120° ঘূর্ণন দেওয়া হয় তবে দেখা যাবে যে ঘূর্ণনের পর ব্লেডগুলির অবস্থানের কোন প্রভেদ করা যাচ্ছে না। এই বিশেষ ধর্মকে জ্যামিতির ভাষায় ঘূর্ণনজাত প্রতিসাম্য বলব এবং এই ধর্মবিশিষ্ট জ্যামিতিক চিত্রকে ঘূর্ণনজাত প্রতিসম চিত্র বলি।

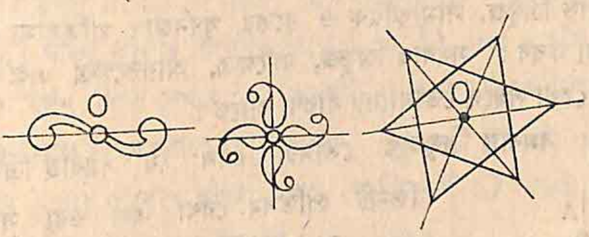
প্রসঙ্গত এও উল্লেখ করা প্রয়োজন যে, যে-কোন বস্তুকে (বা চিত্রকে) তার উপরিস্থিত কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করে 360° $(=2\pi)$* ঘূর্ণন দিলে বস্তুটির (বা চিত্রটির) প্রতিবিম্ব মূল বস্তুর সঙ্গে সর্বতোভাবে মিলে যায়। তোমরা কার্ডবোর্ডের যে-কোন আকৃতি কেটে নিয়ে পরীক্ষা করে দেখতে পার।

সুতরাং যদি কোন জ্যামিতিক চিত্রকে (বা বস্তুকে) কোন নির্দিষ্ট কোণে ঘূর্ণন দেওয়ার পর প্রতিবিম্ব-চিত্রটি মূল চিত্রতেই চিত্রায়িত হয় তবে সেই জ্যামিতিক চিত্রকে (বা বস্তুকে) ঘূর্ণনজাত প্রতিসম চিত্র বলব। এক্ষেত্রে কেন্দ্রটিকে ঘূর্ণনজাত প্রতিসাম্যের কেন্দ্র বলি।

*π-এর উচ্চারণ পাই (pai)—একটি গ্রীক শব্দ, $\pi = 180°$।

5 (a). ঘূর্ণনজাত প্রতিসম চিত্রের ক্রম বা কাল (period) :

নিম্নে তিনটি ঘূর্ণনজাত প্রতিসম চিত্র দেওয়া আছে।



(i) (ii) (iii)

চিত্র—29

ঐ তিনটি ঘূর্ণনজাত প্রতিসাম্যের ঘূর্ণন-কোণ যথাক্রমে $180°$ (বা π), $90°$ (বা $\frac{\pi}{2}$) এবং $60°$ (বা $\frac{\pi}{3}$)।

প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করলে ঘূর্ণনগুলি যথাক্রমে লেখা যায় O_π, $O_{\frac{\pi}{2}}$, $O_{\frac{\pi}{3}}$। লক্ষ্য কর, চিত্রটিকে ঘূর্ণন-কেন্দ্রের চতুর্দিকে এক বার পূর্ণ প্রদক্ষিণ করাতে হলে চিত্র—29(i)-এর ক্ষেত্রে 2 বার, চিত্র—29 (ii)-এর ক্ষেত্রে 4 বার, চিত্র—29 (iii)-এর ক্ষেত্রে 6 বার পর্যায়ক্রমে ঘূর্ণন প্রয়োগ করতে হবে।

এই 2, 4, 6-কে যথাক্রমে O_π, $O_{\frac{\pi}{2}}$, $O_{\frac{\pi}{3}}$ ঘূর্ণনগুলির ক্রম বা কাল (period) বলব।

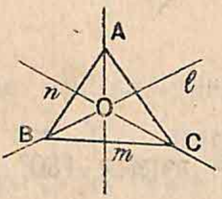
সুতরাং ঘূর্ণনজাত প্রতিসম চিত্রের ঘূর্ণন-কেন্দ্রের চতুর্দিকে চিত্রটিকে একবার পূর্ণ প্রদক্ষিণ করাতে ঐ নির্দিষ্ট ঘূর্ণনটি যত বার প্রয়োগ করতে হবে সেই সংখ্যা দ্বারা ঘূর্ণনজাত প্রতিসম চিত্রের ক্রম বা কাল নির্দেশ করা হয়।

আমরা এখন কয়েকটি সামতলিক জ্যামিতিক চিত্রের ঘূর্ণনজাত প্রতিসাম্য সম্বন্ধে আলোচনা করব।

6. কয়েকটি ঘূর্ণনজাত প্রতিসম সামতলিক জ্যামিতিক চিত্র সম্বন্ধীয় আলোচনা ঃ

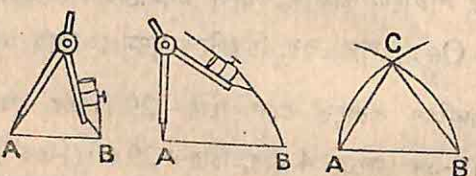
সমবাহু ত্রিভুজ, সামান্তরিক ও বৃত্তের ঘূর্ণনজাত প্রতিসাম্য সম্বন্ধে আলোচনা করব। সমবাহু ত্রিভুজ, বর্গক্ষেত্র, আয়তক্ষেত্র এবং বৃত্তের প্রতিসম রেখা সম্বন্ধে তোমাদের ধারণা আছে।

(A) **সমবাহু ত্রিভুজ ঃ** তোমরা জান যে সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি প্রতিসম রেখা এবং ওরা সমবিন্দু (চিত্র—30)।



চিত্র—30

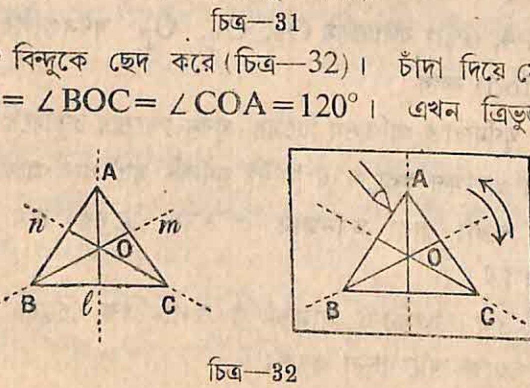
শক্ত কাগজের উপর একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করে $\triangle ABC$কে কেটে নাও। $\triangle ABC$-এর তিনটি প্রতিসম রেখা নির্ণয় করে নাও। মনে কর, l, m, n প্রতিসম রেখা



(সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন)

চিত্র—31

তিনটি O বিন্দুকে ছেদ করে (চিত্র—32)। চাঁদা দিয়ে মেপে দেখ, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120°$। এখন ত্রিভুজটি সাদা



চিত্র—32

কাগজের উপর স্থাপন করে O বিন্দুতে পিন এঁটে দাও। ত্রিভুজটি সাদা কাগজের উপর এঁকে নাও (চিত্র—32)। এবার O বিন্দুকে কেন্দ্র করে O_{+120° (ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে) বা O_{-120° (ঘড়ির কাঁটার দিকে) ঘূর্ণন দিলে দেখবে যে ত্রিভুজটি সাদা কাগজের উপর আঁকা ত্রিভুজের সঙ্গে সর্বতোভাবে মিলে যাচ্ছে। O_{+120° বা O_{-120° ঘূর্ণন পর পর 3 বার প্রয়োগ করলে দেখবে যে ত্রিভুজটি O বিন্দুর চারদিকে একবার পূর্ণ প্রদক্ষিণ করে আসবে।

সুতরাং সমবাহু ত্রিভুজের ঘূর্ণনজাত প্রতিসাম্য সম্বন্ধে আমরা সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে—

(i) সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিসম রেখাত্রয়ের ছেদবিন্দু ওর ঘূর্ণনজাত প্রতিসাম্যের ঘূর্ণন-কেন্দ্র,

(ii) ঘূর্ণনটির ঘূর্ণন-কোণ $+120^\circ$ বা -120°,

(iii) ঘূর্ণনটির ক্রম বা কাল 3।

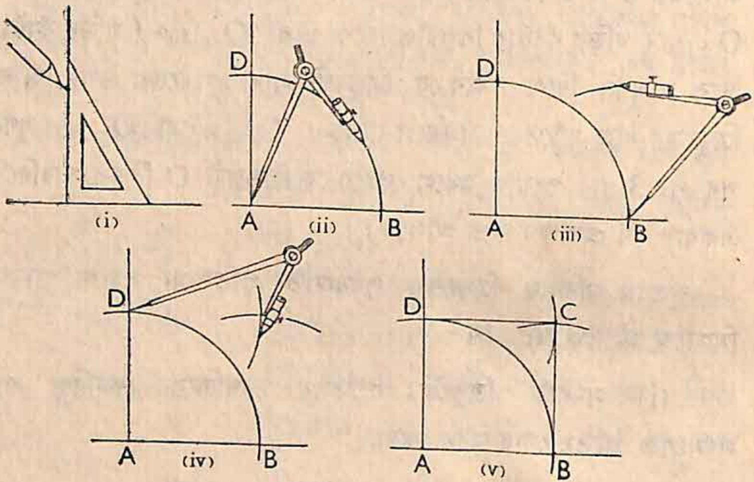
(B) বর্গক্ষেত্র :

তোমরা জান বর্গক্ষেত্রের চারটি প্রতিসম রেখা এবং উহারা সমবিন্দু।

শক্ত কাগজের উপর বর্গক্ষেত্র ABCD অঙ্কন কর (চিত্র—33); বর্গক্ষেত্রটি কেটে নিয়ে তার চারটি প্রতিসম রেখা (l, m, n, p) নির্ণয় কর। মনে কর, প্রতিসম রেখা চারটি O বিন্দুতে ছেদ করে।

বর্গক্ষেত্রটি সাদা কাগজের উপর স্থাপন করে O বিন্দুতে পিন দিয়ে এঁটে নিয়ে ABCD বর্গক্ষেত্রটি এঁকে নাও (চিত্র—34)। এবার O_{+90° বা O_{-90° ঘূর্ণন দিলে দেখবে যে বর্গক্ষেত্রটি সাদা কাগজের

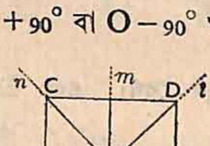
উপর আঁকা বর্গক্ষেত্রের সঙ্গে আবার সর্বতোভাবে মিলে যাচ্ছে।



(বর্গক্ষেত্র অঙ্কন)

চিত্র—33

$O+90^\circ$ বা $O-90^\circ$ ঘূর্ণন পর পর 4 বার প্রয়োগ করলে বর্গক্ষেত্রটি O বিন্দুর চারদিকে একবার পূর্ণ প্রদক্ষিণ করে আসবে। সুতরাং বর্গক্ষেত্রের ঘূর্ণনজাত প্রতিসাম্য সম্বন্ধে আমরা সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে :



চিত্র—34

(i) প্রতিসম রেখা চারটির ছেদবিন্দু ওর ঘূর্ণনজাত প্রতিসাম্যের ঘূর্ণন-কেন্দ্র ;

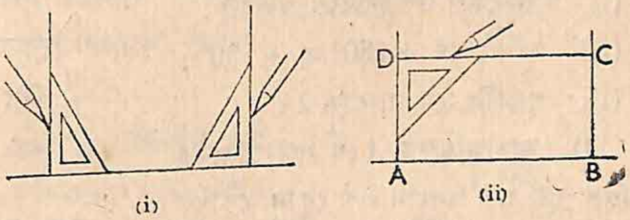
(ii) ঘূর্ণনটির ঘূর্ণন-কোণ $+90^\circ$ বা -90° ;

(iii) ঘূর্ণনটির ক্রম বা কাল 4।

(C) আয়তক্ষেত্র :

তোমরা জান, আয়তক্ষেত্রের দুটি প্রতিসম রেখা আছে।

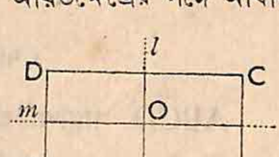
শক্ত কাগজের উপর একটি আয়তক্ষেত্র এঁকে (চিত্র—35) নিয়ে



(আয়তক্ষেত্র অঙ্কন) চিত্র—35

আয়তক্ষেত্রটি কেটে নাও। আয়তক্ষেত্রটির প্রতিসম রেখা l, m নির্ণয় কর (চিত্র—36)। মনে কর, প্রতিসম রেখা দুটি O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

আয়তক্ষেত্র ABCDকে সাদা কাগজের উপর স্থাপন করে O বিন্দুতে পিন দিয়ে এঁটে নিয়ে কাগজের উপর ABCD আয়তক্ষেত্রটি এঁকে নাও। এবার O_{+180° বা O_{-180° ঘূর্ণন দিলে দেখবে যে আয়তক্ষেত্রটি সাদা কাগজের উপর আঁকা আয়তক্ষেত্রের সঙ্গে আবার সর্বতোভাবে মিলে যাচ্ছে। O_{+180° বা O_{-180° ঘূর্ণন পর পর 2 বার প্রয়োগ করলে আয়তক্ষেত্রটি O বিন্দুর চারদিকে একবার পূর্ণ প্রদক্ষিণ করে আসবে। সুতরাং আয়তক্ষেত্রের ঘূর্ণন-



চিত্র—36

জাত প্রতিসাম্য সম্বন্ধে আমরা সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে :

(i) প্রতিসম রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু ওর ঘূর্ণনজাত প্রতিসাম্যের ঘূর্ণন-কেন্দ্র।

(ii) ঘূর্ণনটির ঘূর্ণন-কোণ $+180°$ বা $-180°$।

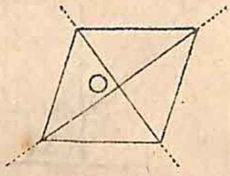
(iii) ঘূর্ণনটির ক্রম বা কাল 2।

অনুসিদ্ধান্ত : রম্বসের ঘূর্ণনজাত প্রতিসাম্যের

(i) ঘূর্ণন-কেন্দ্র ওর কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু;

(ii) ঘূর্ণন-কোণ $+180°$ বা $-180°$;

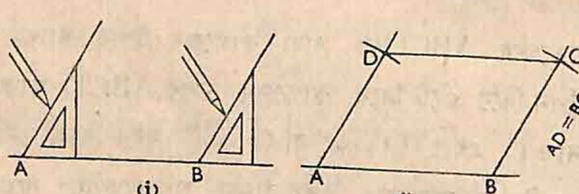
(iii) ঘূর্ণনটির ক্রম বা কাল 2।



চিত্র—37

(D) **সামান্তরিক :** (যে সামান্তরিকের সন্নিহিত দুই বাহু অসমান এবং কোন কোণই সমকোণ নহে) :

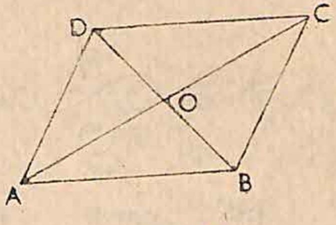
সন্নিহিত বাহুদ্বয় অসমান এবং কোন কোণই সমকোণ নয় এরকম একটি সামান্তরিক ABCD আঁক (চিত্র—38)।



(সামান্তরিক অঙ্কন) চিত্র—38

ABCD সামান্তরিকটি কেটে নাও। দেখ, এর কোন প্রতিসম রেখা নেই। এর কর্ণদুটি যোগ কর; মনে কর, উহারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। এখন সামান্তরিকটি সাদা কাগজের উপর স্থাপন করে, O বিন্দুতে পিন্ এঁটে কাগজের উপর এঁকে নাও। O বিন্দুকে কেন্দ্র করে $O_{+180°}$ বা $O_{-180°}$ ঘূর্ণন প্রয়োগ করলে দেখবে যে সামান্তরিকটি সাদা কাগজের উপর আঁকা সামান্তরিকের

সঙ্গে সর্বতোভাবে মিলে গেছে। এই ঘূর্ণন যদি পর পর 2 বার প্রয়োগ করা হয় তবে সামান্তরিকটি O বিন্দুর চারদিকে একবার পূর্ণ প্রদক্ষিণ করে আসবে। সুতরাং এইরূপ সামান্তরিকের ঘূর্ণনজাত প্রতিসাম্য সম্বন্ধে আমরা সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে :



চিত্র—39

(i) কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু ওর ঘূর্ণনজাত প্রতিসাম্যের ঘূর্ণন-কেন্দ্র।

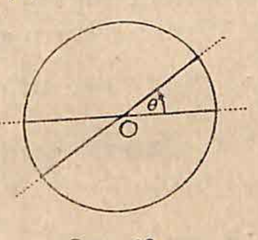
(ii) ঘূর্ণনটির ঘূর্ণন-কোণ $+180^\circ$ বা -180°।

(iii) ঘূর্ণনটির ক্রম বা কাল 2।

(E) বৃত্ত :

তোমরা জান, বৃত্তের যে-কোন ব্যাস ওর প্রতিসম রেখা হয়।

শক্ত কাগজে একটি বৃত্ত এঁকে বৃত্তটি কেটে নাও। এবার সাদা কাগজের উপর বৃত্তটি স্থাপন করে কেন্দ্র O বিন্দুতে পিন এঁটে বৃত্তটি সাদা কাগজের উপর আঁক।

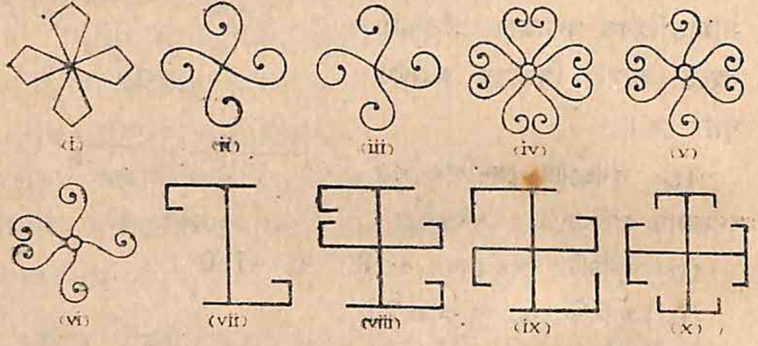


চিত্র —40

O বিন্দুকে কেন্দ্র করে বৃত্তটিতে যে-কোন কোণে (θ) ঘূর্ণন প্রয়োগ করলে বৃত্তটি সর্বদা সাদা কাগজে আঁকা বৃত্তের সঙ্গে সর্বতোভাবে মিলে থাকবে। সুতরাং বলা যেতে পারে যে বৃত্তের কেন্দ্রটি ঘূর্ণনজাত প্রতিসাম্যের ঘূর্ণন-কেন্দ্র এবং উহা যে-কোন পরিমাণ ঘূর্ণন-কোণের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

অনুশীলনী 2C.

1. নীচের কোন্ কোন্ চিত্র ঘূর্ণনজাত প্রতিসাম্যের অধিকারী, কোন্ চিত্রগুলি নয় বল :



চিত্র—41

2. কোন ঘূর্ণনের কোণ নিম্নলিখিত কোণগুলি হলে প্রত্যেক ক্ষেত্রে ঐ ঘূর্ণনের ক্রম বা কাল কত হবে ?

(i) $\pm 40^\circ$, (ii) $\pm 30^\circ$, (iii) $\pm 45^\circ$, (iv) $\pm 60^\circ$, (v) $\pm 90^\circ$ (vi) $\pm 120^\circ$, (vii) $\pm 72^\circ$।

4. (*a*) ঠিক উত্তরটির পাশে ✓ দাগ দাও :

(i) সমবাহু ত্রিভুজের ঘূর্ণন-জাত প্রতিসাম্যের ঘূর্ণন-কোণ··· $\frac{\pi}{2}$ / $\frac{3\pi}{2}$ / $\frac{2\pi}{3}$, এবং উহার ক্রম···4/3/6

(ii) রম্বসের ঘূর্ণনজাত প্রতিসাম্যের ঘূর্ণন-কোণ...$\frac{\pi}{4}$/2π/π এবং উহার ক্রম...8/2/3

(iii) বর্গক্ষেত্রের ঘূর্ণনজাত প্রতিসাম্যের ঘূর্ণন-কোণ....$\frac{2\pi}{3}$ / $\frac{\pi}{2}$ / $\frac{\pi}{6}$ এবং উহার ক্রম....4/3/12

(iv) আয়তক্ষেত্রের ঘূর্ণনজাত প্রতিসাম্যের ঘূর্ণন-কোণ...$\frac{\pi}{2}$ / π / $\frac{\pi}{4}$ এবং উহার ক্রম...2/4/6

(*b*) উপরোক্ত প্রতিক্ষেত্রে ঘূর্ণন-কেন্দ্রবিন্দুর স্থান কোথায় বল।

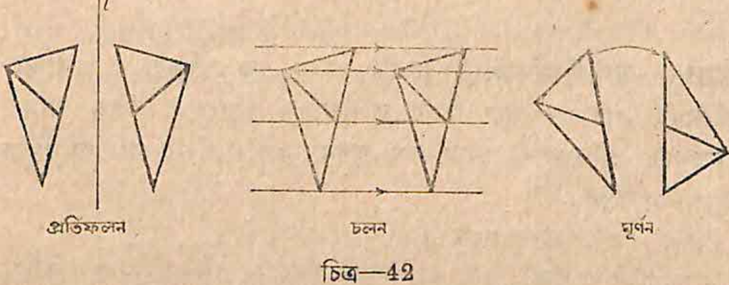
তৃতীয় অধ্যায়

রূপান্তর (Transformation), রূপান্তরের সংযুক্তি (Composition of Transformations), সর্বসম চিত্র (Congruent Figure) ঃ

7. রূপান্তর (Transformation) ঃ

প্রতিফলন, চলন ও ঘূর্ণন সম্পর্কে তোমরা কিছু জেনেছ। ঐসকল প্রক্রিয়ার ফলে জ্যামিতিক চিত্রের কিছু না কিছু পরিবর্তন (স্থানের পরিবর্তন, দিক্‌স্থিতির পরিবর্তন) ঘটে ; যদিও তোমরা জান ঐসকল প্রক্রিয়া প্রয়োগের ফলে বিন্দুর কেবলমাত্র স্থান-পরিবর্তন ঘটে।

মনে কর, কোন জ্যামিতিক চিত্রে প্রতিফলন, চলন বা ঘূর্ণন প্রয়োগ করা হল (চিত্র—42)।

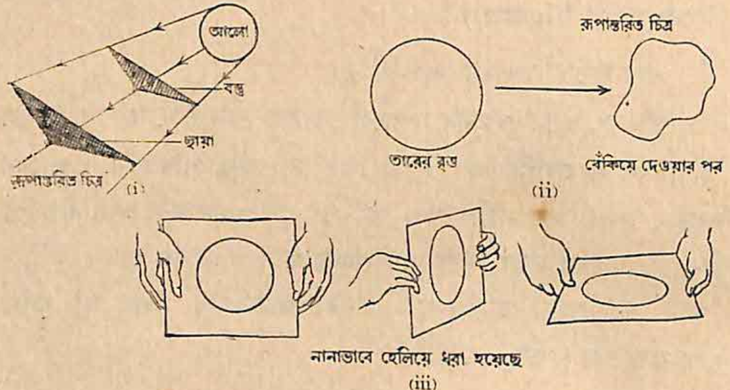


চিত্র—42

প্রতি ক্ষেত্রেই চিত্রের প্রতিবিম্ব পেয়ে থাকি। তাই আমরা বলতে পারি যে প্রতিফলন, চলন বা ঘূর্ণন প্রয়োগে চিত্রটি তার প্রতিবিম্বে রূপান্তরিত হয়েছে।

এই প্রক্রিয়াগুলিকে এক কথায় রূপান্তর-প্রক্রিয়া বলতে পারি। তোমরা এ-ও জান যে ঐ সকল প্রক্রিয়ায় (প্রতিফলন, চলন, ঘূর্ণন) (i) কোন একটি বিন্দুর একটিমাত্র প্রতিবিম্ব পাওয়া যায় এবং (ii) দুটি ভিন্ন বিন্দুর প্রতিবিম্ব একই বিন্দুতে হতে পারে না।

প্রতিফলন, চলন এবং ঘূর্ণন ছাড়া আরো নানা ধরনের রূপান্তর-প্রক্রিয়া আছে। নীচে চিত্রের (চিত্র—43) সাহায্যে সেগুলি দেখানো



চিত্র—43

হয়েছে। দেখ, প্রতিক্ষেত্রে চিত্রটি কোন এক প্রক্রিয়া বা রূপান্তর-প্রক্রিয়ার সাহায্যে অন্য চিত্রে রূপান্তরিত হয়েছে। কিন্তু আমরা কেবলমাত্র প্রতিফলন, চলন এবং ঘূর্ণন, এই রূপান্তর-প্রক্রিয়া সম্বন্ধে আলোচনা করব।

7(a). **রূপান্তরের সংজ্ঞা :**

যে প্রক্রিয়া দ্বারা কোন জ্যামিতিক চিত্রকে অপর চিত্রে রূপান্তরিত করলে

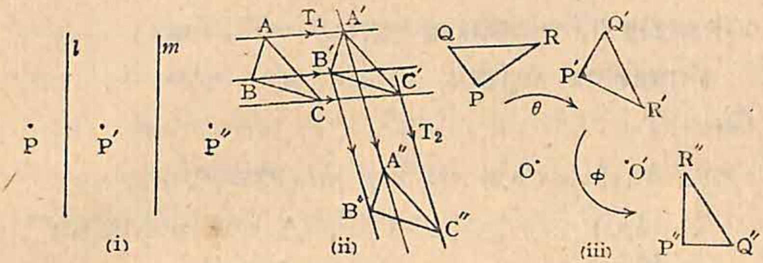
(i) প্রতি বিন্দুর একটি প্রতিবিম্ব-বিন্দু,

এবং (ii) দুটি ভিন্ন বিন্দুর দুটি ভিন্ন প্রতিবিম্ব-বিন্দু পাওয়া যায়, সে প্রক্রিয়াকে **রূপান্তর** (transformation) বলি।

৮. **রূপান্তরের সংযুক্তি (Composition of transformations) :**

কোন জ্যামিতিক চিত্রে প্রতিফলন, চলন বা ঘূর্ণন এই রূপান্তর-গুলি উপর্যুপরি একাধিকবার প্রয়োগ করে চিত্রের রূপান্তর ঘটানো যায়। অথবা ঐ রূপান্তরগুলির বিভিন্ন সমন্বয়ের সাহায্যে জ্যামিতিক চিত্রের রূপান্তর ঘটাতে পারি। যেমন চিত্র—44 (i) দেখ।

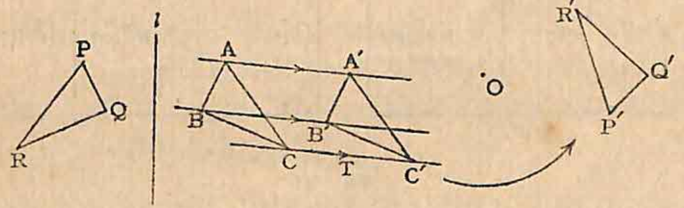
P বিন্দুকে l এবং m রেখায় প্রতিফলিত করে P'' বিন্দুতে রূপান্তরিত করা হয়েছে। তেমন $\triangle ABC$কে দুটি ভিন্ন চলন দিয়ে



(একই রূপান্তর একাধিক বার প্রয়োগ করা হয়েছে।)

চিত্র—44

$\triangle A''B''C''$তে (চিত্র—44, ii) এবং $\triangle PQR$কে দুটি ভিন্ন ঘূর্ণন দিয়ে $\triangle P''Q''R''$তে (চিত্র—44, iii) রূপান্তরিত করা হয়েছে। এ তো গেল একই জাতীয় রূপান্তরের সমন্বয় বা সংযুক্তি (composition)।



চিত্র—45

চিত্র—45 দেখ। প্রথমে $\triangle PQR$কে l রেখায় প্রতিফলিত করে $\triangle ABC$তে রূপান্তরিত করা হয়েছে। তারপর চলন দিয়ে $\triangle ABC$কে $\triangle A'B'C'$তে এবং পরে ঘূর্ণন দিয়ে $\triangle P'Q'R'$তে রূপান্তরিত করা হয়েছে। সুতরাং এক্ষেত্রে প্রতিফলন, চলন ও ঘূর্ণন

এই রূপান্তরগুলির সমন্বয়ে বা সংযুক্তির দ্বারা $\triangle PQR$কে $\triangle P'Q'R'$-এ রূপান্তরিত করা হয়েছে। সুতরাং রূপান্তরের সংযুক্তি বলতে বুঝব একই জাতীয় বা ভিন্ন জাতীয় রূপান্তরের উপর্যুপরি সমন্বয়।

রূপান্তরগুলির সংযুক্তিকে একত্রে সংকেতে প্রকাশ করা যায়। যেমন—

চিত্র 44(i)-এর ক্ষেত্রে লেখা যায়, $ml\,(P)=P''$,

" 44(ii) " " " $T_2T_1\,(\triangle ABC)=\triangle A''B''C''$,

" 44(iii) " " " $O'_{\phi}O_{\theta}\,(\triangle PQR)$

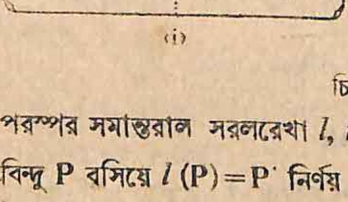
$$=\triangle P''Q''R'',$$

" 45 " " " $O_{\theta}Tl\,(\triangle PQR)=\triangle P'Q'R'$

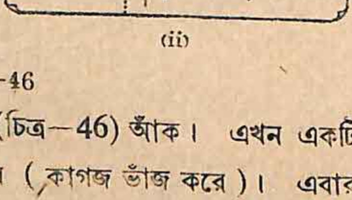
9. দুই প্রতিফলনের সংযুক্তি (Composition of two Reflections) :

(A) পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখায় প্রতিফলনের সংযুক্তি :

(i) সাদা কাগজের উপর ত্রিকোণী ও রুলারের সাহায্যে দুটি



(i)



(ii)

চিত্র—46

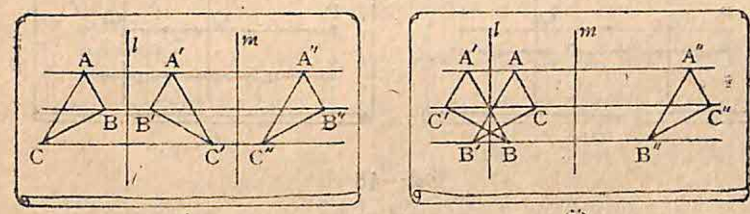
পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখা l, m (চিত্র—46) আঁক। এখন একটি বিন্দু P বসিয়ে $l\,(P)=P'$ নির্ণয় কর (কাগজ ভাঁজ করে)। এবার $m\,(P')=P''$ নির্ণয় কর। সুতরাং প্রতীকের সাহায্যে লেখা যায় :

$$ml\,(P)=P'',$$

অর্থাৎ ml রূপান্তরের এই সংযুক্তির সাহায্যে P বিন্দুকে P'' বিন্দুতে রূপান্তরিত করা হল।

এখন লক্ষ্য কর, তোমরা অন্য একটি রেখা n খুঁজে পেতে পার যার জন্য $n(P)=P''$ হবে। আবার ml এই সংযুক্তিকে আমরা চলন হিসেবেও প্রকাশ করতে পারি, যার দিক ও দূরত্ব $\overrightarrow{PP''}$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

(ii) সাদা কাগজের উপর ত্রিকোণী ও রুলারের সাহায্যে দুটি পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখা l, m (চিত্র—47) এঁকে নাও। এখন ঐ কাগজের উপর একটি জ্যামিতিক চিত্র ($\triangle ABC$) আঁক।



চিত্র—47

এখন $l(\triangle ABC)=\triangle A'B'C'$ এবং $m(\triangle A'B'C')=\triangle A''B''C''$ নির্ণয় কর। সুতরাং লেখা যায় :

$$ml(\triangle ABC)=\triangle A''B''C'',$$

অর্থাৎ ml রূপান্তরের এই সংযুক্তির সাহায্যে $\triangle ABC$কে $\triangle A''B''C''$তে রূপান্তরিত করা হয়েছে।

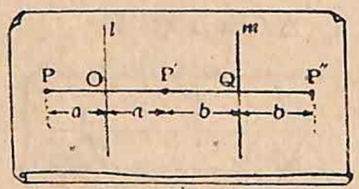
এখন লক্ষ্য কর, এমন কোন প্রতিফলন রেখা (n) খুঁজে বের করা সম্ভব নয় যার জন্য লেখা যায় যে $n(\triangle ABC)=\triangle A''B''C''$।

কিন্তু এটি লক্ষণীয় যে AA'', BB'', CC'' দৈর্ঘ্যগুলি সমান এবং রেখাংশগুলি পরস্পর সমান্তরাল (ত্রিকোণী ও রুলারের সাহায্যে পরীক্ষা কর)। সুতরাং এক্ষেত্রে lm সংযুক্তিটি একটি চলন সৃষ্টি করেছে বলা যায়, যার দিক ও দূরত্ব $\overrightarrow{AA''}$ বা $\overrightarrow{BB''}$ বা $\overrightarrow{CC''}$ দ্বারা

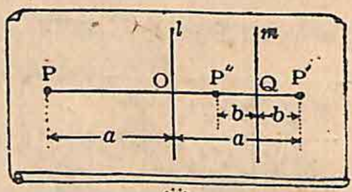
প্রকাশ করা যায়। অর্থাৎ ঐ চলন যদি T হয় তবে লেখা যায়, $ml\ (\triangle ABC) = \triangle A''B''C'' = T\ (\triangle ABC)$।

অনুসিদ্ধান্ত : দুটি পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখায় প্রতিফলনের সংযুক্তি চলন সৃষ্টি করে।

অনুশীলন : দুটি পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখায় প্রতিফলনের সংযুক্তি যে চলন সৃষ্টি করে তার দূরত্ব সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্বের দ্বিগুণ।



(i)



(ii)

চিত্র—48

মনে কর, $l\ (P) = P'$, $m\ (P') = P''$, অর্থাৎ $ml\ (P) = P''$ (চিত্র—48)। উভয় চিত্রের ক্ষেত্রেই ml চলনের দূরত্ব PP''। P, P', P'' সমরেখ বিন্দু তিনটি যুক্ত কর। মনে কর, ঐ রেখা l এবং mকে যথাক্রমে O এবং Q বিন্দুতে ছেদ করল।

তোমরা জান বস্তু-দূরত্ব এবং প্রতিবিম্ব-দূরত্ব সমান। মনে কর, দৈর্ঘ্য $PO =$ দৈর্ঘ্য $P'O = a$, এবং দৈর্ঘ্য $P'Q =$ দৈর্ঘ্য $QP'' = b$;

সুতরাং চিত্র—46 (i) থেকে বলা যায়,

দৈর্ঘ্য $PP'' =$ দৈর্ঘ্য $(PO + OP' + P'Q + QP'')$

$$= a + a + b + b = 2(a+b)$$

এবং l ও m-এর মধ্যবর্তী দূরত্ব = দৈর্ঘ্য $OQ = a + b$

চিত্র—48 (ii) থেকে বলা যায়,

দৈর্ঘ্য $PP'' =$ দৈর্ঘ্য $(PP' - P'P'')$

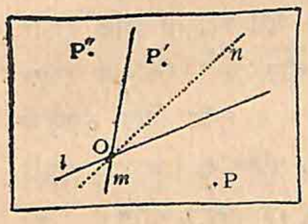
$= (a+a) - (b+b) = 2(a-b)$

এবং l ও m-এর মধ্যবর্তী দূরত্ব = দৈর্ঘ্য $OQ =$ দৈর্ঘ্য $(QP'' + OP'')$

$=$ দৈর্ঘ্য $[QP'' + (OP' - P'P'')] = b + (a - 2b) = a - b$

(B). পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখায় প্রতিফলনের সংযুক্তি :

(i). সাদা কাগজের উপর O বিন্দুতে পরস্পরচ্ছেদী দুটি সরলরেখা l, m (চিত্র—49 i) নাও। P একটি বিন্দু নাও, $l(P)=P'$ এবং $m(P')=P''$ নির্ণয় কর (কাগজ ভাঁজ করে)। সুতরাং লেখা যায়—$ml(P)=P''$ ।

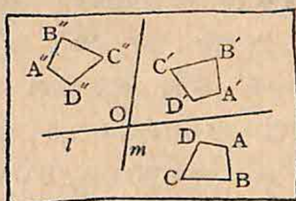


চিত্র—49 (i)

অর্থাৎ ml রূপান্তরের এই সংযুক্তির সাহায্যে P বিন্দুকে P'' বিন্দুতে রূপান্তরিত করা হল।

লক্ষ্য কর, তোমরা অন্য একটি রেখা n খুঁজে পাবে যার জন্য $n(P)=P''$ হবে। আবার মেপে দেখ যে, দৈর্ঘ্য OP = দৈর্ঘ্য OP''; অতএব O বিন্দুকে কেন্দ্র করে $\angle POP''(\theta)$ পরিমাণ কোণে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘূর্ণন দিলে আমরা P-এর প্রতিবিম্ব P'' পাই। অর্থাৎ $ml(P)=P''=O_\theta(P)$ বলতে পারি।

(ii). সাদা কাগজের উপর O বিন্দুতে পরস্পরচ্ছেদী দুটি সরলরেখা l, m (চিত্র—49, ii) নাও, ঐ কাগজের উপর একটি জ্যামিতিক চিত্র (চতুর্ভুজ ABCD) আঁক। $l(ABCD)=A'B'C'D'$ এবং $m(A'B'C'D')=A''B''C''D''$ নির্ণয় কর (কাগজ ভাঁজ করে)। সুতরাং লেখা যায় :



চিত্র—49 (ii)

$ml(ABCD)=A''B''C''D''$,

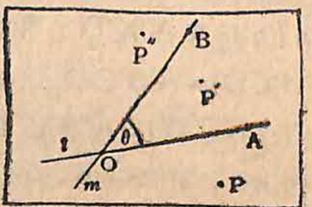
অর্থাৎ ml রূপান্তরের এই সংযুক্তির সাহায্যে চতুর্ভুজ ABCDকে $A''B''C''D''$ চতুর্ভুজে রূপান্তরিত করা হয়েছে।

এমন কোন সরলরেখা n পাওয়া সম্ভব নয়, যার জন্যে এক্ষেত্রে $n(ABCD) = A''B''C''D''$ হতে পারে। কিন্তু লক্ষ্য কর, O বিন্দু থেকে A,B,C,D বিন্দুগুলি যত দূরে আছে, রূপান্তর প্রয়োগের পরও A'', B'', C'', D'' বিন্দুগুলি ঠিক তত দূরে আছে (কাঁটা-কম্পাস দিয়ে মেপে দেখ)। এবং আরো লক্ষ্য কর $\angle AOA'' = \angle BOB'' = \angle COC'' = \angle DOD''$ (চাঁদা দিয়ে মেপে দেখ)। মনে কর, ঐ প্রতি কোণ θ-এর সমান। স্নুতরাং তোমরা ভাবতে পার যে O বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে θ পরিমাণ ঘূর্ণন দিয়ে চতুর্ভুজ ABCDকে চতুর্ভুজ A''B''C''D''তে রূপান্তরিত করা যায়। অর্থাৎ $ml(ABCD) = A''B''C''D'' = O_\theta\ (ABCD)$ বলতে পারি।

অনুসিদ্ধান্ত: দুটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখায় প্রতিফলনের সংযুক্তি ঘূর্ণন সৃষ্টি করে।

অনুশীলন: দুটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখায় প্রতিফলনের সংযুক্তি যে ঘূর্ণন সৃষ্টি করে তার ঘূর্ণন-কোণের পরিমাণ প্রতিফলন-রেখার অন্তর্ভুক্ত কোণের পরিমাণের দ্বিগুণ।

সাদা কাগজের উপর O বিন্দুতে পরস্পরচ্ছেদী l, m দুটি সরলরেখা। ওদের অন্তর্ভুক্ত কোণের পরিমাণ θ। একটি বিন্দু P নাও (চিত্র—50), এখন $l(P) = P'$ নির্ণয় কর; লক্ষ্য কর, $\angle POP'$-এর সমদ্বিখণ্ডক রেখা l (চাঁদা দিয়ে মেপে দেখ $\angle POA = \angle P'OA$)। আবার $m(P') =$ নির্ণয় কর এবং একই



চিত্র—50

ভাবে পরীক্ষা করে দেখ যে m রেখা $\angle P'OP''$-এর সমদ্বিখণ্ডক, অর্থাৎ $\angle P'OB = \angle P''OB$। এবার ভাবা যেতে পারে যে O বিন্দুকে কেন্দ্র করে P বিন্দুকে ঘূর্ণন দিয়ে P'' বিন্দুতে রূপান্তরিত করা হয়েছে এবং এই ঘূর্ণন-কোণ

$\angle POP''$-এর সমান। চাঁদা দিয়ে মাপলে দেখবে যে $\angle POP''$-এর পরিমাণ $\angle AOB$ (l, m-এর অন্তর্ভুক্ত)-এর পরিমাণের দ্বিগুণ।

তাছাড়াও বলতে পার :

$\because \quad \angle POA = \angle P'OA \ (=x$, ধরি)

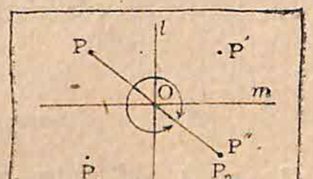
এবং $\angle P'OB = \angle P''OB \ (=y$, ধরি)

$$\begin{aligned} \therefore \quad \angle POP'' &= \angle POA + \angle P'OA + \angle P'OB + \angle P''OB \\ &= x + x + y + y \\ &= 2(x+y) \\ &= 2(\angle P'OA + \angle P'OB) \\ &= 2\angle AOB = 2\theta \end{aligned}$$

অর্থাৎ ঘূর্ণন-কোণটি পরস্পরচ্ছেদী প্রতিফলন-রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের দ্বিগুণ।

(C) পরস্পর লম্ব সরলরেখাদ্বয়ে প্রতিফলনের সংযুক্তি :

(i). সাদা কাগজের উপর পরস্পর লম্ব l, m দুটি সরলরেখা নাও। মনে কর, l, m পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। P একটি বিন্দু নাও। $l(P) = P'$ এবং $m(P') = P''$ অর্থাৎ $ml(P) = P''$ কাগজ ভাঁজের সাহায্যে নির্ণয় কর। এখন OP এবং OP″ দৈর্ঘ্য মাপলে দেখবে দৈর্ঘ্য OP = দৈর্ঘ্য OP″। চাঁদা দিয়ে মেপে দেখ যে $\angle POP'' =$ 180° সুতরাং তোমরা ভাবতে পার যে O বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে 180° ঘূর্ণন দিলে P বিন্দু P″তে রূপান্তরিত হবে।



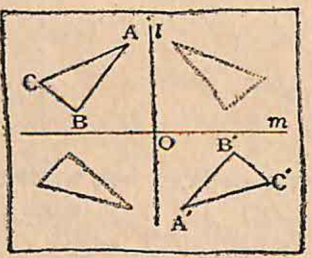
চিত্র

আবার $m(P) = P_1$, এবং $l(P_1) = P_2$ অর্থাৎ $lm(P) = P_2$ নির্ণয় কর। দেখবে P_2 এবং P″ একই বিন্দুতে রূপান্তরিত হচ্ছে। সুতরাং

লেখা যায় যে $lm(P)=ml(P)$, এবং lm ও ml যথাক্রমে $O_{+180°}$ এবং $O_{-180°}$ ঘূর্ণন দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

[প্রসঙ্গত জেনে রাখ যে, ঘূর্ণনের ঘূর্ণন-কোণ $180°$ হলে ঐ ঘূর্ণনকে **অর্ধ-আবর্ত** (**half-turn**) বলব।]

(ii). জ্যামিতিক চিত্রেও অর্ধ-আবর্ত প্রয়োগ করা যায়। নীচে চিত্রের সাহায্যে দেখানো হয়েছে :



চিত্র—52

$l \perp m$ হলে, $lm(\triangle ABC) = lm(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$

লক্ষ্য কর, $OA=OA'$, $OB=OB'$, $OC=OC'$

এবং $\angle AOA' = \angle BOB' = \angle COC' = 180°$

অনুসিদ্ধান্ত : (i) $l_1 l_2 (P) = l_2 l_1 (P)$, যখন $l_1 \perp l_2$

(ii) $l_1 \perp l_2$ হলে, $l_2 l_1$ বা $l_1 l_2$ অর্ধ-আবর্ত (half-turn) সৃষ্টি করে যার ঘূর্ণন-কেন্দ্র l_1 এবং l_2-এর ছেদবিন্দু।

অনুশীলনী 3.A.

1. r, s, t তিনটি রূপান্তর হলে নিম্নলিখিত কোন্ সংযুক্তির দ্বারা প্রথমে s, অতঃপর t এবং শেষে r রূপান্তর প্রয়োগ নির্দেশ করবে :

(i) trs, (ii) str, (iii) rts, (iv) tsr, (v) srt, (vi) rst.

2. (i) দুটি পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখায় একটি বিন্দুর উপর্যুপরি প্রতিফলন চিত্রসহ দেখাও।

(ii) দুটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখায় একটি বিন্দুর প্রতিফলন চিত্রসহ দেখাও।

3. দেখাও l, m রেখায় প্রতিফলনের সংযুক্তি (i) চলন সৃষ্টি করে যখন $l \parallel m$, এবং (ii) ঘূর্ণন সৃষ্টি করে যখন l এবং m পরস্পরচ্ছেদী। প্রথম ক্ষেত্রে

চলনের দিক ও দূরত্ব এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ঘূর্ণন-কেন্দ্র ও ঘূর্ণন-কোণ কত হবে তা বল।

4. *l*, *m* রেখায় প্রতিফলনের সংযুক্তি কখন অর্ধ-আবর্ত সৃষ্টি করে ?

অর্ধ-আবর্ত-এর দ্বারা একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন কর।

5. নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তগুলির যেটি ঠিক তার পাশে √ দাগ দাও এবং যেটি ভুল সেটি শুদ্ধ করে লেখ :—

(i) একাধিক রূপান্তরের সংযুক্তি অপর একটি রূপান্তর।

(ii) দুটি প্রতিফলনের সংযুক্তি চলন সৃষ্টি করলে প্রতিফলন-রেখা দুটি পরস্পরচ্ছেদী হয়।

(iii) দুটি পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখায় প্রতিফলনের সংযুক্তি ঘূর্ণন সৃষ্টি করে।

(iv) দুটি প্রতিফলনের সংযুক্তি অর্ধ-আবর্ত সৃষ্টি করলে প্রতিফলন-রেখা দুটি পরস্পর লম্ব হয়।

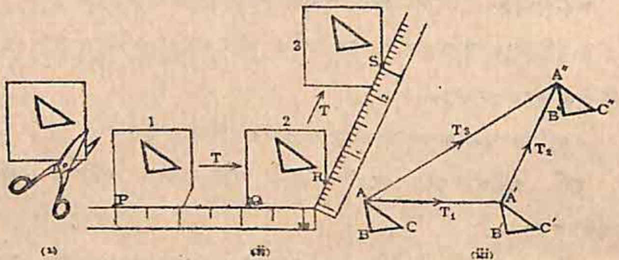
(v) দুটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখায় প্রতিফলনে যে ঘূর্ণন সৃষ্টি হয় তার ঘূর্ণন-কেন্দ্র প্রতিফলন-রেখা দুটির ছেদবিন্দু এবং ঘূর্ণন-কোণের পরিমাণ প্রতিফলন-রেখা দুটির অন্তর্ভুক্ত কোণের দ্বিগুণ।

6. দুইয়ের অধিক পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখায় প্রতিফলনের সংযুক্তি দ্বারা কোন চতুর্ভুজকে রূপান্তরিত কর ; কাগজ ভাঁজের সাহায্যে চিত্র এঁকে দেখাও।

7. দুইয়ের অধিক পরস্পরচ্ছেদী অথচ সমবিন্দু নয় এমন সরলরেখায় প্রতিফলনের সংযুক্তি দ্বারা কোন ত্রিভুজকে রূপান্তরিত কর ; কাগজ ভাঁজের সাহায্যে চিত্র এঁকে দেখাও।

10. দুই চলনের সংযুক্তি (Composition of translations) :

একটি চৌকো কার্ডবোর্ডের উপর জ্যামিতিক চিত্র (ত্রিভুজ) আঁক। এবার ঐ কার্ডবোর্ডের একটি কোনা কেটে বাদ দাও (চিত্র—53 (i))।



চিত্র—53

এবার রুলারের পাশ বরাবর কার্ডবোর্ডের এক পাশ ঘেঁষে কার্ডবোর্ডটি সাদা কাগজের উপর বসাও, পিনের সাহায্যে কাগজের উপর শীর্ষবিন্দু তিনটি নির্ণয় করে A, B, C দ্বারা চিহ্নিত কর। এখন রুলার বরাবর T_1 চলন দিয়ে 1 নং স্থান থেকে 2 নং স্থানে বোর্ডটিকে এনে আগের মত পিনের সাহায্যে A′, B′, C′ শীর্ষবিন্দু চিহ্নিত কর। এবার অপর একটি রুলার বোর্ডের তির্যক পাশ বরাবর বসিয়ে T_2 চলন দিয়ে 3 নং স্থানে আন। এখন পিনের সাহায্যে A″, B″, C″ শীর্ষবিন্দু চিহ্নিত কর।

কার্ডবোর্ড এবং রুলার তুলে নিয়ে A, B, C যুক্ত করে $\triangle ABC$ উৎপন্ন কর। একইভাবে $\triangle A'B'C'$ এবং $\triangle A''B''C''$ উৎপন্ন কর।

পরীক্ষা করলে দেখবে যে,

দৈর্ঘ্য AA' = দৈর্ঘ্য BB = দৈর্ঘ্য CC'

এবং ওরা পরস্পর সমান্তরাল।

আবার এও দেখবে, দৈর্ঘ্য $A'A''$ = দৈর্ঘ্য $B'B''$ = দৈর্ঘ্য $C'C''$ এবং ওরাও পরস্পর সমান্তরাল।

অতএব লেখা যেতে পারে,

$T_1\ (\Delta ABC) = \Delta A'B'C',\ T_2(\Delta A'B'C') = \Delta A''B''C''$

অর্থাৎ, $T_2T_1\ (\Delta ABC) = \Delta(A''B''C'')$

এখন তোমরা বলতে পার যে T_2T_1 সংযুক্তি দ্বারা ΔABCকে $\Delta A''B''C''$-তে রূপান্তরিত করা হয়েছে।

এবার আবার পরীক্ষা করে দেখতে পার, দৈর্ঘ্য AA'' = দৈর্ঘ্য BB'' = দৈর্ঘ্য CC'' এবং এগুলি পরস্পর সমান্তরাল।

সুতরাং T_2T_1 এই সংযুক্তিকে অপর একটি চলন (T_3) দ্বারা প্রকাশ করা যেতে পারে।

অর্থাৎ $T_2T_1\ (\Delta ABC) = \Delta A''B''C'' = T_3(\Delta ABC)$।

লক্ষ্য কর, T_1-এর দিক ও দূরত্ব $\overrightarrow{PQ}$ দ্বারা এবং T_2-এর দিক ও দূরত্ব $\overrightarrow{RS}$ দ্বারা (চিত্র—53, ii) নির্দেশ করা যেতে পারে। এখন যদি T_2 চলন আগে এবং পরে T_1 চলন প্রয়োগ করা হয় (অর্থাৎ T_1T_2 সংযুক্ত করা হয়) তখনও দেখা যাবে যে $T_1T_2\ (\Delta ABC) = \Delta A''B''C'' = T_3(\Delta ABC)$। [নিজে পরীক্ষা করে দেখ।]

অতএব $T_1T_2\ (\Delta ABC) = T_2T_1\ (\Delta ABC)$

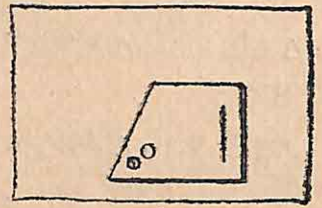
$$= T_3\ (\Delta ABC)$$

11. দুই ঘূর্ণনের সংযুক্তি (Composition of rotations) :

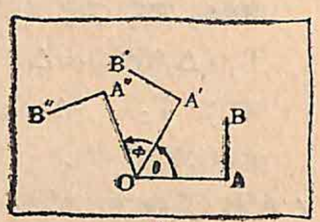
A. (যখন দুটি ঘূর্ণনের একই ঘূর্ণন-কেন্দ্র)

একটি কার্ডবোর্ডের উপর যে-কোন জ্যামিতিক চিত্র (রেখাংশ) আঁক (চিত্র—54)। কার্ডবোর্ডটি সাদা কাগজের উপর স্থাপন করে

O বিন্দুতে পিন আঁট। পিনের সাহায্যে রেখাংশের প্রান্তবিন্দুদ্বয় কাগজের উপর নির্ণয় করে A, B দ্বারা চিহ্নিত কর। কার্ডবোর্ডটিতে



(i)



(ii)

চিত্র—54

O_θ ঘূর্ণন দেওয়ার পর আবার যথাক্রমে A′, B′ দ্বারা রেখাংশের প্রান্তবিন্দুদ্বয় চিহ্নিত কর। পরে O_ϕ ঘূর্ণন দিয়ে কার্ডবোর্ডটি ঘূর্ণিত করে রেখাংশটির প্রান্তবিন্দুদ্বয় যথাক্রমে A″, B″ দ্বারা চিহ্নিত কর অতএব বলা যাবে যে $O_\phi O_\theta$ সংযুক্তি দ্বারা AB রেখাংশকে A″B″ রেখাংশে রূপান্তরিত করা হল।

অর্থাৎ $O_\phi O_\theta(AB) = A''B''$

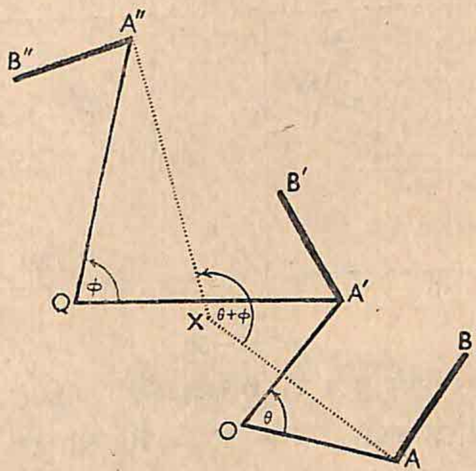
এখন লক্ষ্য কর, যদি $O_{\theta+\phi}$ ঘূর্ণন দেওয়া হয় তখনও AB রেখাংশ A″B″ রেখাংশে রূপান্তরিত হবে। অতএব লেখা যেতে পারে,

$$O_\phi O_\theta(AB) = A''B'' = O_{\theta+\phi}(AB)$$

B. (যখন দুটি ঘূর্ণনের ভিন্ন ঘূর্ণন-কেন্দ্র) :

সাদা কাগজের উপর রেখাংশ-আঁকা কার্ডবোর্ডটি স্থাপন করে O_θ ঘূর্ণন দেওয়ার পর অপর বিন্দু Q-কে কেন্দ্র করে Q_ϕ ঘূর্ণন প্রয়োগ করা হল। অতএব $Q_\phi O_\theta$ সংযুক্তির ফলে AB রেখাংশ A″B″ রেখাংশে (চিত্র—55) রূপান্তরিত হল।

এখন AA'' এবং BB'' রেখাংশের লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক এঁকে তাদের



চিত্র—55

ছেদবিন্দু X নির্ণয় কর। এবার তোমার চিত্রে মেপে দেখলে দেখবে যে দৈর্ঘ্য XA = দৈর্ঘ্য XA'', দৈর্ঘ্য XB = দৈর্ঘ্য XB'' হবে। X বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে $\angle AXA''$ পরিমাণ ঘূর্ণন দিলে অবশ্যই AB রেখাংশ $A''B''$ রেখাংশে রূপান্তরিত হবে দেখ। এখন চাঁদার সাহায্যে মাপলে অবশ্যই দেখবে, $\angle AXA'' = \theta+\phi$ হচ্ছে।

অতএব দেখা গেল, $Q_\phi O_\theta$ সংযুক্তিকে অপর একটি ঘূর্ণন হিসেবে ভাবা যায় যার ঘূর্ণন-কোণের পরিমাণ $(\theta+\phi)$-এর সমান। এক্ষেত্রেও লেখা যায়ঃ

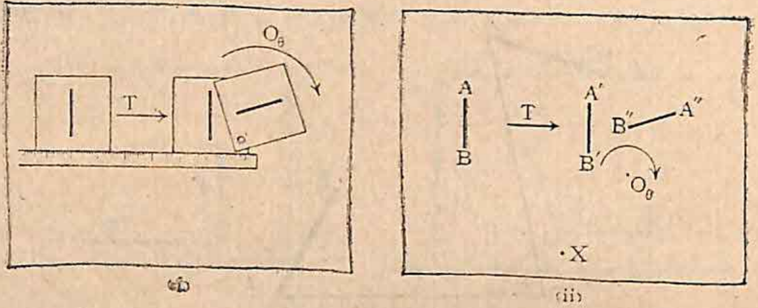
$$Q_\phi O_\theta\,(AB) = A''B'' = X_{\theta+\phi}\,(AB)\text{।}$$

অনুসিদ্ধান্তঃ দুটি ঘূর্ণনের সংযুক্তি অপর একটি ঘূর্ণন হয় যার ঘূর্ণন-কোণ ঐ দুই ঘূর্ণন-কোণের সমষ্টির সমান।

12. চলন ও ঘূর্ণনের সংযুক্তি (Composition of Translation and Rotation) :

কার্ডবোর্ডের উপর একটি রেখাংশ এঁকে নিয়ে কার্ডবোর্ডটি সাদা

কাগজের উপর স্থাপন কর। পিনের সাহায্যে রেখাংশের প্রান্তবিন্দুদ্বয়



চিত্র—56

কাগজের উপর নির্ণয় করে A, B দ্বারা চিহ্নিত কর (চিত্র—56)। রুলারের সাহায্যে প্রথমে T চলন দিয়ে AB রেখাংশকে $A'B'$ স্থানে আন। তারপর O_θ ঘূর্ণন দ্বারা ঐ রেখাংশকে $A''B''$ স্থানে আন। অতএব বলা যেতে পারে যে

$$O_\theta T(AB) = A''B''$$

এখন AA'' এবং BB'' রেখাংশদ্বয়ের লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করে উহাদের ছেদবিন্দু X নির্ণয় কর। এখন মেপে দেখ যে $\angle AXA'' = \angle BXB''$ হবে। মনে কর, $\angle AXA'' = \angle BXB'' = \phi$।

সুতরাং ভাবা যেতে পারে যে T ও O_θ -এর সংযুক্তি একটি ঘূর্ণন X_ϕ।

এখন যদি AB রেখাংশে প্রথম O_θ ঘূর্ণন এবং পরে চলন T প্রয়োগ কর, দেখবে যে এদের সংযুক্তি ঐ একই ঘূর্ণন (X_ϕ) নির্দেশ করছে। অতএব লেখা যায়ঃ $O_\theta T\ (AB) = T\ O_\theta\ (AB)$।

অনুসিদ্ধান্তঃ (i) একটি চলন ও ঘূর্ণনের সংযুক্তি একটি ঘূর্ণন নির্দেশ করে।

(ii) T ও O_θ-এর সংযুক্তি এবং O_θ ও T-এর সংযুক্তি একই ঘূর্ণন নির্দেশ করে।

অনুশীলনী 3B.

1. একটি বিন্দু Pতে ভিন্ন দিক ও ভিন্ন দূরত্ববিশিষ্ট ছুটি চলন T_1 এবং T_2 প্রয়োগ কর। $T_3(P)=T_2T_1(P)$ হলে পরীক্ষা দ্বারা দেখাও যে T_3 চলনের দূরত্ব T_1 এবং T_2 চলনের দূরত্বের সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

2. একটি বিন্দু Pতে একই দিক ও ভিন্ন দূরত্ববিশিষ্ট ছুটি চলন T_1 এবং T_2 প্রয়োগ কর। $T_3(P)=T_2\,T_1(P)$ হলে পরীক্ষা দ্বারা দেখাও যে T_3 চলনের দিক ঐ চলন ছুটির দিকে এবং T_3 চলনের দূরত্ব T_1 ও T_2 চলনের দূরত্বের সমষ্টির সমান।

3. একটি জ্যামিতিক চিত্রকে ছুটি ভিন্ন ঘূর্ণন O_{+90° এবং Q_{-30° দ্বারা রূপান্তরিত কর। উহাদের সংযুক্তি $X\theta$ দ্বারা প্রকাশ করা গেলে পরীক্ষা দ্বারা দেখাও $\theta=+60^\circ$ হবে।

4. পরীক্ষা দ্বারা দেখাও যে $O\theta$ ও T এই ছু-এর সংযুক্তি এবং T ও $O\theta$-এর সংযুক্তি একই রূপান্তর নির্দেশ করে।

5. নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তগুলির মধ্যে যেটি ঠিক তার পার্শ্বে √ চিহ্ন দাও এবং ভুলটি শুদ্ধ করে লেখ :

(i) T_1 ও T_2-এর সংযুক্তি এবং T_2 ও T_1-এর সংযুক্তি একই রূপান্তর নির্দেশ করে।

(ii) $O\theta$ ও $Q\phi$-এর সংযুক্তি এবং $Q\phi$ ও $O\theta$-এর সংযুক্তি একই রূপান্তর নির্দেশ করে।

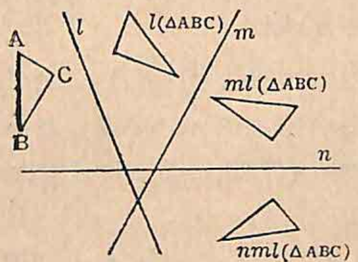
(iii) $O\theta$ ও $Q\phi$-এর সংযুক্তি $X\theta_1$ দ্বারা নির্দেশ করা গেলে, $\theta_1=\theta+\phi$ হয়।

(iv) একটি চলন ও ঘূর্ণনের সংযুক্তি একটি ঘূর্ণন নির্দেশ করে।

(v) চলন T ও ঘূর্ণন $O\theta$-এর সংযুক্তি এবং $O\theta$ ও T-এর সংযুক্তি একই ঘূর্ণন নির্দেশ করে।

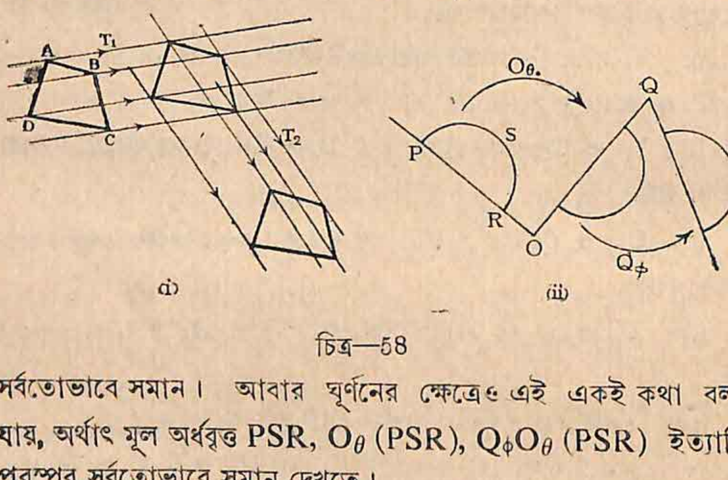
13. সর্বসম চিত্র (Congruent Figure) :

কাগজের সমতলে $\triangle ABC$ আঁক। প্রতিফলন $l, m, n \cdots$ রেখায় কাগজটি ক্রমান্বয়ে ভাঁজ করে $l(\triangle ABC)$, $ml(\angle ABC)$; nml $(\triangle ABC)$ ইত্যাদি প্রতিবিম্ব চিত্রগুলি নির্ণয় কর। লক্ষ্য কর, ত্রিভুজের মূল চিত্র $(\triangle ABC)$ এবং প্রতিফলনের পর প্রতিবিম্ব চিত্রগুলি পরস্পর একই রকম দেখতে বা সর্বতোভাবে সমান (চিত্র—57)।



চিত্র—57

নীচের চিত্রদুটি লক্ষ্য কর। চলনের ক্ষেত্রে মূল চতুর্ভুজ এবং T_1 (ABCD), T_2T_1 (ABCD) চতুর্ভুজগুলি দেখতে পরস্পর



চিত্র—58

সর্বতোভাবে সমান। আবার ঘূর্ণনের ক্ষেত্রেও এই একই কথা বলা যায়, অর্থাৎ মূল অর্ধবৃত্ত PSR, O_θ (PSR), $Q_\phi O_\theta$ (PSR) ইত্যাদি পরস্পর সর্বতোভাবে সমান দেখতে।

উপরে আলোচিত রূপান্তরগুলির ক্ষেত্রে দেখা গেল, যে-কোন জ্যামিতিক চিত্র রূপান্তরিত হওয়ার পরও মূল চিত্রের সঙ্গে সর্বতোভাবে

সমান থাকে। জ্যামিতির ভাষায় এই ধরনের চিত্রগুলিকে **পরস্পর সর্বসম চিত্র** (Congruent Figure) বলি।

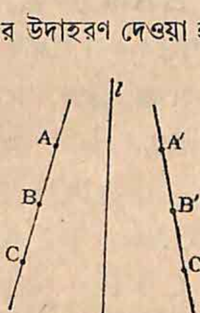
এখন লক্ষ্য করলে দেখতে পাবে যে মূল চিত্রের **রেখাংশের দৈর্ঘ্য, কোণের পরিমাণ, বক্র রেখাংশের দৈর্ঘ্য, বিন্দুর অন্তর্বর্তিতা ও বিন্দুর সমরেখ ধর্ম** প্রতিবিম্ব চিত্রগুলিতে বজায় থাকছে। তাই আমরা বলতে পারি যে :—

কোন জ্যামিতিক চিত্র অপর কোন জ্যামিতিক চিত্রের সঙ্গে সর্বসম হবে তখনই যখন একটি চিত্রকে রূপান্তর (প্রতিফলন, চলন, ঘূর্ণন) বা রূপান্তরের সংযুক্তি দ্বারা অপর চিত্রে সর্বতোভাবে (দৈর্ঘ্যের পরিমাণ, কোণের পরিমাণ, বিন্দুর অন্তর্বর্তিতা ও সমরেখ ধর্ম অপরিবর্তিত রেখে) রূপান্তর করা যায়।

'পরস্পর সর্বসম' এই শব্দের পরিবর্তে $\cong$ বা $\simeq$ চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। সুতরাং $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ বা $\triangle ABC \simeq \triangle A'B'C'$ বলতে বুঝব $\triangle ABC$ এবং $\triangle A'B'C'$ পরস্পর সর্বসম চিত্র।

নীচে চিত্রসহ কয়েকটি পরস্পর সর্বসম চিত্রের উদাহরণ দেওয়া হল :

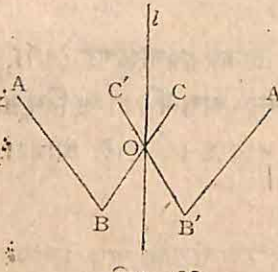
উদাহরণ : (i) A, B, C তিনটি সমরেখা বিন্দু এবং $l(A)=A'$, $l(B)=B'$, $l(C)=C'$; A', B', C' প্রতিবিম্ব-বিন্দুগুলিও সমরেখ হবে এবং B-এর অন্তর্বর্তিতা ধর্ম বজায় থাকবে (চিত্র—59)। এছাড়া জান যে AB-এর দৈর্ঘ্যও অপরিবর্তিত থাকবে।



চিত্র—59

এক্ষেত্রে লেখা যায় : $AC \simeq A'C'$; এছাড়াও লেখা যেতে পারে, $AB \simeq A'B'$, $BC \simeq B'C'$।

উদাহরণ : (ii) মনে কর, $l(\angle ABC) = \angle A'B'C'$ [চিত্র—60]।



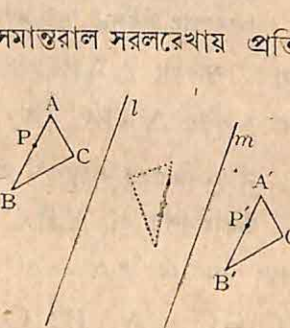
চিত্র—60

এখানে O স্থিরবিন্দু নেওয়া হয়েছে, তবুও O-এর অন্তর্বর্তিতা ধর্ম বজায় থাকছে। তোমরা জান, প্রতিফলনে কোণের পরিমাণও অপরিবর্তিত থাকে এবং সমরেখ বিন্দুর ধর্মও বজায় থাকে। অতএব লেখা যেতে পারে :

$$\angle ABC \simeq \angle A'B'C\text{ ।}$$

[এখানে লক্ষ্য কর, দিক্‌স্থিতির পরিবর্তন সত্ত্বেও চিত্রদ্বয় পরস্পর সর্বসম হতে কোন বাধা নেই।]

উদাহরণ : (iii) l, m দুটি পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখায় প্রতিফলনের সংযুক্তির ফলে চলন সৃষ্টি করে $\triangle ABC$কে $\triangle A'B'C'$তে রূপান্তরিত করা হয়েছে।



চিত্র—61

কাগজ ভাঁজ করে পরীক্ষা করে দেখ,

$\angle ABC = \angle A'B'C'$,
$\angle BCA = \angle B'C'A'$, $\angle CAB = \angle C'A'B'$, দৈর্ঘ্য AB = দৈর্ঘ্য $A'B'$, দৈর্ঘ্য BC = দৈর্ঘ্য $B'C'$, দৈর্ঘ্য CA = দৈর্ঘ্য $C'A'$। এছাড়াও সমরেখ বিন্দুর ধর্ম এবং অন্তর্বর্তিতা ধর্ম বজায় থাকছে। অতএব লেখা যায়,

$$\triangle ABC \simeq \triangle A'B'C'\text{ ।}$$

অনুশীলনী 3C.

1. সঠিক উত্তরের পাশে √ দাগ দাও :

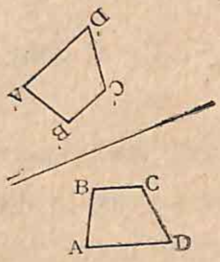
(i) $AB \simeq CD$ হলে, দৈর্ঘ্য $AB >$ দৈর্ঘ্য CD,
দৈর্ঘ্য $AB <$ দৈর্ঘ্য CD,
দৈর্ঘ্য $AB =$ দৈর্ঘ্য CD.

(ii) $\angle ABC \simeq \angle PQR$ হলে, $\angle ABC \geqslant \angle PQR$,
$\angle ABC \leqslant \angle PQR$,
$\angle ABC = \angle PQR$.

(iii) $AB \simeq PQ$ এবং $l(A) = P$ হলে, $l(B) = P$ হবে,
$l(Q) = B$ হবে,
$l(Q) = A$ হবে।

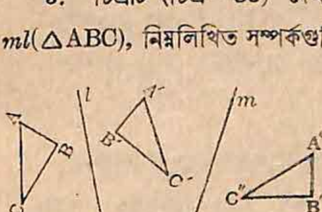
2. চিত্রটি (চিত্র—62) দেখ, l (চতুর্ভুজ ABCD) = চতুর্ভুজ $A'B'C'D'$।
নিম্নলিখিত শূন্য স্থানগুলি পূরণ কর :

(i) $CD \simeq$ —, (ii) $AB \simeq$ —,
(iii) $A'D' \simeq$ —, (iv) $\angle ADC \simeq$ —,
(v) $\angle A'B'C' \simeq$ —, (vi) $\triangle ABC \simeq$ —,
(vii) $B'D' \simeq$ —, (viii) $AC \simeq$ —,



চিত্র—62

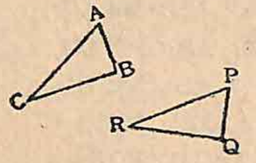
3. চিত্রটি (চিত্র—63) দেখ, এক্ষেত্রে $\triangle A''B''C'' = m(\triangle A'B'C') = ml(\triangle ABC)$, নিম্নলিখিত সম্পর্কগুলি ঠিক না ভুল বল :



চিত্র—63

(i) $\triangle ABC \simeq \triangle A'B'C \simeq \triangle A''B''C''$
(ii) $AC \simeq A''C''$ এবং AC, $A'C'$ পরস্পর সর্বসম।
(iii) $\angle ABC$, $\angle A'B'C'$, $\angle A''B''C''$-এর দিক্‌স্থিতি একই,
(iv) $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, $\triangle A''B''C''$-এর দিক্‌স্থিতি একই।

4. চিত্রটি (চিত্র—64) দেখ, $\triangle ABC \simeq \triangle PQR$ এবং $AB \simeq PQ$। সম্পর্কগুলি ঠিক না ভুল বল :



চিত্র—64

(i) AB রেখাংশ PQতে রূপান্তরিত হয়েছে।

(ii) C বিন্দু অবশ্যই R বিন্দুতে রূপান্তরিত হয়েছে।

(iii) $PR \simeq AB$ এবং $CB \simeq RQ$ নাও হতে পারে।

চতুর্থ অধ্যায়

সম্পাদ্য অঙ্কন

14. সম্পাদ্য অঙ্কনে যন্ত্রের ব্যবহার ঃ

বিভিন্ন সম্পাদ্য অঙ্কনের পূর্বে সম্পাদ্য অঙ্কনে তোমরা কি কি যন্ত্র ব্যবহার করতে পার এ বিষয়ে দু'চার কথা বলছি। যদি বিশেষ কোন রকম উল্লেখ না থাকে তবে সম্পাদ্য অঙ্কনে আমরা ত্রিকোণী বা চাঁদা ব্যবহার করব না, এমন কি নির্দিষ্ট পরিমাণ দৈর্ঘ্য মাপতেও রুলারে দেওয়া দৈর্ঘ্যের একক ব্যবহার করব না। সম্পাদ্য অঙ্কনে আমরা কেবলমাত্র

(i) রুলার ব্যবহার করব সরলরেখা অঙ্কনে বা দুটি বিন্দু সংযোজনে,

(ii) কাঁটা-কম্পাস বা পেন্সিল-কম্পাস ব্যবহার করব নির্দিষ্ট পরিমাণ দৈর্ঘ্য কেটে নিতে, আর কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করে বৃত্ত বা বৃত্তচাপ আঁকতে পেন্সিল-কম্পাস ব্যবহার করব।

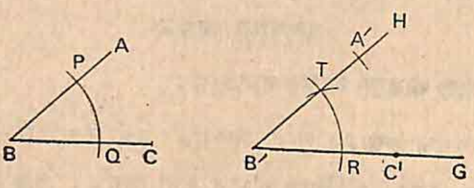
প্রসঙ্গত জেনে রাখ ঃ

সম্পাদ্যে যা আঁকতে বলা হয় তাকে সম্পাদ্যের **সাধারণ নির্বচন** বলি।

সম্পাদ্য অঙ্কনের পর স্বভাবতই প্রশ্ন জাগতে পারে যে অঙ্কন সাধারণ নির্বচন অনুযায়ী ঠিক হল কিনা। কিন্তু তা প্রমাণ করা সীমিত জ্ঞানের জন্য এখন সম্ভব নয়। তবে যতটা সম্ভব যাচাই করে নেব যে, সম্পাদ্য অঙ্কন সাধারণ নির্বচন অনুযায়ী হয়েছে কিনা।

15. কোন নির্দিষ্ট কোণের সর্বসম কোণ অঙ্কন :

∠ABC দেওয়া আছে ; এর সর্বসম একটি কোণ আঁকতে হবে।



চিত্র—65

অঙ্কন প্রণালী : B′G একটি রেখাংশ নাও। প্রদত্ত ∠ABC-এর B বিন্দুকে কেন্দ্র করে এমন ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তচাপ আঁক যে বৃত্তচাপটি BA এবং BC বাহুকে যথাক্রমে P এবং Q বিন্দুতে (চিত্র—65) ছেদ করে। ঐ পরিমাণ ব্যাসার্ধ নিয়ে B′কে কেন্দ্র করে একটি বৃত্তচাপ আঁক। মনে কর, বৃত্তচাপটি B′Gকে R বিন্দুতে ছেদ করল। এখন R বিন্দুকে কেন্দ্র করে PQ দৈর্ঘ্য পরিমাণ ব্যাসার্ধ নিয়ে অপর একটি বৃত্তচাপ আঁক। মনে কর, এই বৃত্তচাপটি পূর্বের বৃত্তচাপকে T বিন্দুতে ছেদ করল। B′T যুক্ত করে B′H রেখাংশ টান।

তোমরা যাচাই করে দেখতে পার (চাঁদার সাহায্যে) যে ∠ABC এবং ∠HB′G-এর পরিমাণ সমান।

16. ত্রিভুজ অঙ্কন :

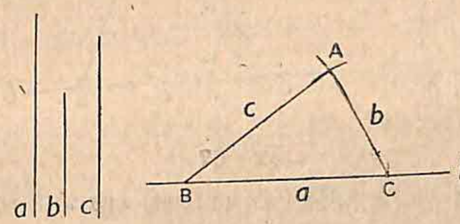
নির্দিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কনে প্রয়োজনীয় কি কি তথ্য কমপক্ষে জানা দরকার তা নীচে উল্লেখ করা হল :

(i) তিনটি বাহু, বা (ii) দুটি বাহু এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ, বা (iii) একটি বাহু ও দুটি কোণ।

16. (i) কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহু দেওয়া থাকলে ত্রিভুজটি অঙ্কন :

ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য a, b, c দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন প্রণালী : l একটি সরলরেখা নাও। a বাহুর সমান করে BC অংশ পেন্সিল-কম্পাসের সাহায্যে কেটে নাও। এখন C



চিত্র—66

বিন্দুকে কেন্দ্র করে b বাহু পরিমাণ ব্যাসার্ধ নিয়ে এবং B বিন্দুকে কেন্দ্র করে c বাহু পরিমাণ ব্যাসার্ধ নিয়ে দুটি বৃত্তচাপ আঁক। মনে কর, ঐ বৃত্তচাপ দুটি A বিন্দুতে ছেদ করল। এখন AB ও AC যুক্ত কর।

$\triangle ABC$ হল এমন ত্রিভুজ যার BC বাহু a দৈর্ঘ্যের সমান, CA বাহু b দৈর্ঘ্যের সমান, AB বাহু c দৈর্ঘ্যের সমান।

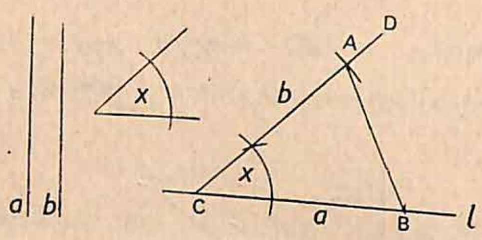
[পরীক্ষা করে দেখ, যদি দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান বা ক্ষুদ্রতর হয় তবে ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব নয় ; এ ছাড়া অন্য সব ক্ষেত্রে ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব হচ্ছে।]

16 (ii) ত্রিভুজের দুই বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া থাকলে ত্রিভুজ অঙ্কন :

কোন ত্রিভুজের দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য a, b এবং সেগুলির অন্তর্ভুক্ত কোণের সর্বসম $\angle x$ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন প্রণালী :

l একটি রেখা নাও। ঐ রেখা থেকে a বাহুর সমান করে CB অংশ কেটে নাও (চিত্র—67)।

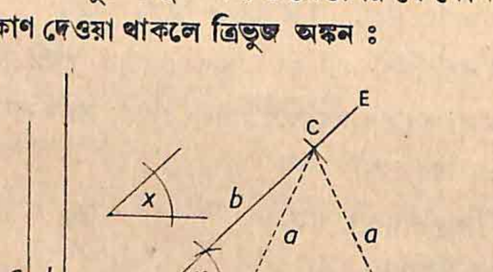


চিত্র—67

এখন CB বাহুকে নির্দিষ্ট কোণের একটি বাহু মনে করে C বিন্দুতে $\angle x$-এর সমান করে $\angle BCD$ আঁক। CD থেকে b বাহুর সমান করে CA অংশ কেটে নাও। AB যুক্ত কর।

$\triangle ABC$-এর BC বাহু a-এর এবং CA বাহু b-এর সমান এবং এই বাহুদুটির অন্তর্ভুক্ত $\angle ACB$ প্রদত্ত $\angle x$-এর সমান। $\triangle ABC$ই অভীষ্ট ত্রিভুজ।

16. (iii) ত্রিভুজের দুটি বাহু ও সেগুলির যে-কোন একটি বাহুর বিপরীত কোণ দেওয়া থাকলে ত্রিভুজ অঙ্কন :



চিত্র—68

দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য a, b এবং a বাহুর বিপরীত কোণ দেওয়া আছে $\angle x$, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন প্রণালী : l একটি রেখা নাও, তার উপর একটি বিন্দু A নাও। l রেখা বরাবর নির্দিষ্ট কোণের একটি বাহু কল্পনা করে A বিন্দুতে $\angle x$-এর সমান করে $\angle$DAE আঁক (D, l রেখার উপর অপর একটি বিন্দু)।

এখন AE থেকে b বাহুর সমান করে AC অংশ কেটে নাও। C বিন্দুকে কেন্দ্র করে a পরিমাণ ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁক। মনে কর, বৃত্তচাপটি l রেখাকে B এবং B_1 বিন্দুতে ছেদ করল। এখন $\triangle$ ABC বা $\triangle$ AB_1C (চিত্র—68) আমাদের অভীষ্ট ত্রিভুজ, যার $\angle$CAB বা $\angle CAB_1$ সমান $\angle x$ এবং AC বাহু b-এর এবং CB বা CB_1 বাহু a-এর সমান।

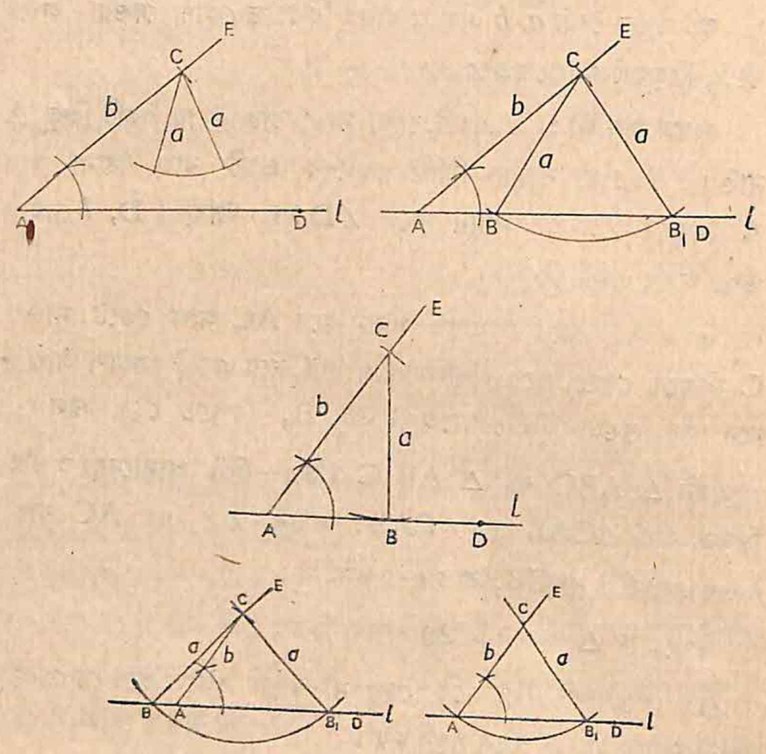
উপরোক্ত $\triangle$ অঙ্কনে বিভিন্ন সম্ভাব্য চিত্র :

(i) বৃত্তচাপটি l রেখাকে ছেদ না করলে বুঝতে হবে যে প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নয়।

(ii) বৃত্তচাপটি l রেখাকে একটি বিন্দুতে স্পর্শ করতে পারে।

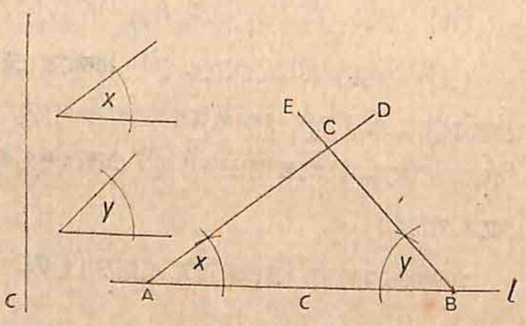
(iii) বৃত্তচাপটি l রেখাকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করতে পারে। ঐ ছেদবিন্দুদ্বয় A বিন্দুর এক পাশে থাকতে পারে, দুটি ছেদবিন্দু A-এর বিপরীত দিকে থাকতে পারে বা দুটি ছেদবিন্দুর একটি A বিন্দুতে মিলে যেতে পারে।

সবকয়টি সম্ভাব্য ত্রিভুজ চিত্র সাহায্যে (চিত্র—69) দেখানো আছে।



চিত্র—69

16. (iv) ত্রিভুজের একটি বাহু এবং ঐ বাহু-সংলগ্ন দুটি কোণ দেওয়া থাকলে ত্রিভুজ অঙ্কন :



চিত্র—70

ত্রিভুজের একটি বাহু c এবং তৎসংলগ্ন $\angle x$, $\angle y$ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন প্রণালী ঃ একটি রেখা l নাও, তার থেকে c-এর সমান করে AB অংশ কেটে নাও। এখন AB রেখাংশকে $\angle x$-এর একটি বাহু মনে করে $\angle x$-এর সমান করে A বিন্দুতে এবং BA রেখাংশকে $\angle y$-এর একটি বাহু মনে করে $\angle y$-এর সমান করে B বিন্দুতে যথাক্রমে $\angle$DAB এবং $\angle$EBA আঁক (চিত্র—70)। মনে কর, AD এবং BE রেখা পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করল। $\triangle$ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ, যার AB দৈর্ঘ্য c-এর সমান এবং $\angle CAB = \angle x$ ও $\angle CBA = \angle y$।

অনুশীলনী—4A.

1. একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন কর যার অতিভুজ এবং অপর একটি বাহু নির্দিষ্ট আছে।

2. $\triangle$ABC-এর বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য নীচে দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। যদি কোন ক্ষেত্রে ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব না হয় সেই ক্ষেত্রে বাহু তিনটির সম্পর্ক কি এবং যে ক্ষেত্রে আঁকা সম্ভব সে ক্ষেত্রেই বা বাহু তিনটির সম্পর্ক কি ?

(i) AB = 8 সে.মি., BC = 6 সে.মি., CA = 10 সে.মি.

(ii) AB = 4·5 সে.মি., BC = 5·6 সে.মি., CA = 7 সে.মি.

(iii) AB = 7 সে.মি., BC = 3 সে.মি., CA = 3 সে.মি.

(iv) AB = 4·7 সে.মি., BC = 2·3 সে.মি., CA = 7 সে.মি.

3. $\triangle$ABC অঙ্কন কর যার AB = 3 সে.মি., BC = 4 সে.মি., CA = 5 সে.মি.। CA বাহুকে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর এবং BD দৈর্ঘ্য রুলারের সাহায্যে নির্ণয় কর।

4. $\triangle$ABC অঙ্কন কর যার AB = 5 সে.মি., BC = 4 সে.মি., CA = 5.4

সে.মি. ; এখন ∠ABCকে সমদ্বিখণ্ডিত কর। মনে কর, ঐ সমদ্বিখণ্ডক ABকে D বিন্দুতে ছেদ করে। AD এবং BD রেখাংশের দৈর্ঘ্য রুলারের সাহায্যে নির্ণয় কর।

5. △ABC অঙ্কন কর যার AB=6 সে.মি., BC=4 সে.মি., CA=5 সে.মি.। CA থেকে CD অংশ 3 সে.মি.-এর সমান করে কাট, BD যুক্ত কর। চাঁদার সাহায্যে ∠ABD ও ∠CBD নির্ণয় কর।

6. (*a*) একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁক যার

(i) প্রতি বাহু 4 সে.মি.-এর সমান, (ii) প্রতি বাহু 5 সে.মি.-এর সমান,

(iii) প্রতি বাহু 6.5 সে মি.-এর সমান।

প্রত্যেক ক্ষেত্রে কোণ তিনটির পরিমাণ চাঁদার সাহায্যে নির্ণয় কর।

(*b*) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন কর যার সমান বাহু দুটি 6 সে.মি.-এর সমান।

7. △ABC ত্রিভুজ অঙ্কন কর যার বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে *a*, *b*, *c*। এখন (i) প্রতি বাহুর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক এঁকে দেখ যে ঐ সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু, (ii) প্রতি কোণের সমদ্বিখণ্ডক এঁকে দেখ যে ঐ সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।

8. △ABC অঙ্কন কর যার AB=5 সে.মি., BC=6 সে.মি. এবং এই দুই বাহুর অন্তর্গত কোণের পরিমাণ 50°।

9. △ABC অঙ্কন কর যার ∠ABC=30°, এবং

(i) BA=6 সে.মি., AC=5 সে.মি.,

(ii) BA=6 সে.মি., AC=3 সে.মি.

(iii) BA=6 সে.মি., AC=6 সে.মি.

কোন্ ক্ষেত্রে প্রদত্ত সর্তানুযায়ী একাধিক ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব হল বল।

10. △ABC অঙ্কন কর যার ∠CAB=60°, ∠CBA=45° এবং উভয় কোণ-সংলগ্ন বাহুটির দৈর্ঘ্য 6 সে.মি.।

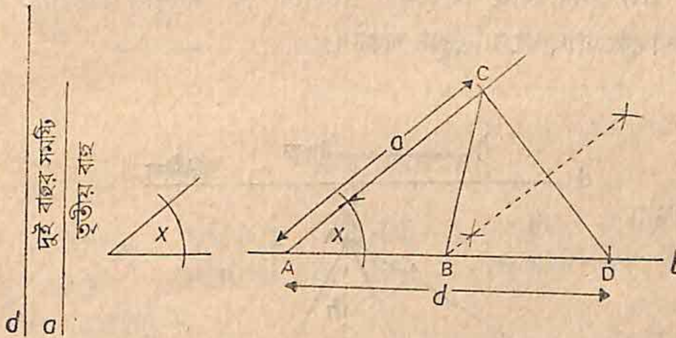
11. △ABC অঙ্কন কর যার AB= 5·5 সে.মি. এবং ঐ বাহু-সংলগ্ন কোণ-দ্বয়ের পরিমাণ যথাক্রমে 55° এবং 65°।

12. *l* রেখার উপর A, P, Q, B চারটি বিন্দু এমনভাবে স্থাপন কর যেন AP, PQ, QB প্রতিটি দৈর্ঘ্য সমান হয়। এখন একটি সমদ্বিবাহু △ABC অঙ্কন কর, যার CA ও CB বাহুর দৈর্ঘ্য সমান। কম্পাসের সাহায্যে CP এবং CQ দৈর্ঘ্য নির্ণয় করে এই দুই দৈর্ঘ্যের সম্পর্ক কি বল।

17. বিভিন্ন তথ্যসম্বলিত ত্রিভুজ অঙ্কন :

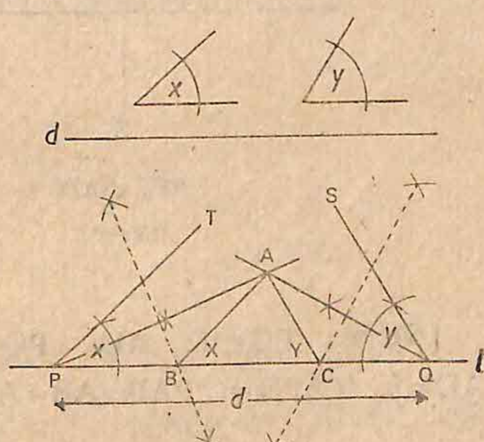
বিভিন্ন তথ্যসম্বলিত কয়েকটি ত্রিভুজ অঙ্কনের কেবলমাত্র উপায় বা ইংগিত নীচে দেওয়া হল। তোমরা নিজে নিজে ত্রিভুজগুলির অঙ্কন-প্রণালী লেখ।

(i) ত্রিভুজের দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি এবং উহাদের অন্তর্গত কোণ ও তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য নির্দিষ্ট থাকলে ত্রিভুজ অঙ্কন।



(অভীষ্ট △ABC) চিত্র—71

(ii) ত্রিভুজের পরিসীমা (তিন বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি) এবং দুটি কোণ দেওয়া থাকলে ত্রিভুজ অঙ্কন।

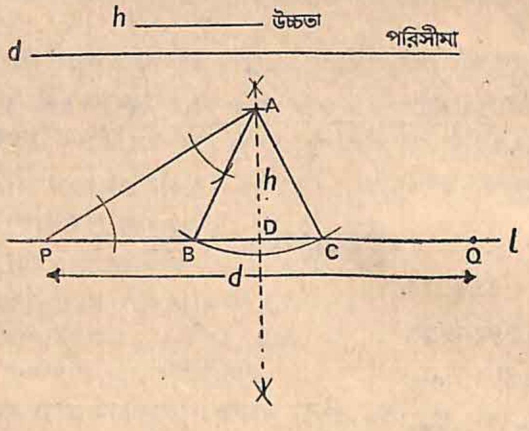


(অভীষ্ট △ABC)

চিত্র—72

[ইংগিত : $PQ = d$; $\angle TPQ = \angle x$, $\angle SQP = \angle y$, এই দুই কোণের সমদ্বিখণ্ডক A বিন্দুতে ছেদ করে। PA এবং QA-এর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক PQকে যথাক্রমে B এবং C বিন্দুতে ছেদ করে।]

(iii) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা ও অসমান বাহু সাপেক্ষে উচ্চতা দেওয়া থাকলে ত্রিভুজ অঙ্কন।

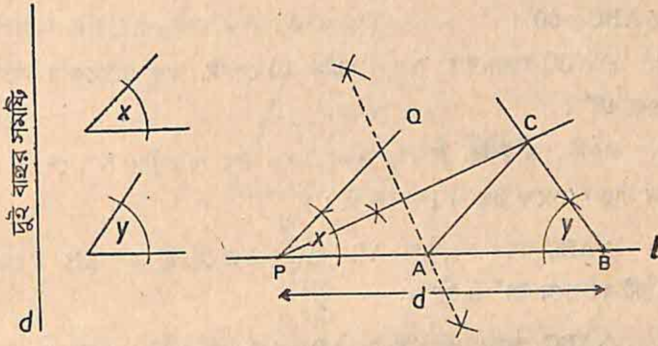


(অভীষ্ট $\triangle ABC$)

চিত্র—73

[ইংগিত : $PQ = d$; AD, PQ-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক। $AD = h$, $\angle APD = \angle PAB$, $AB = AC$।]

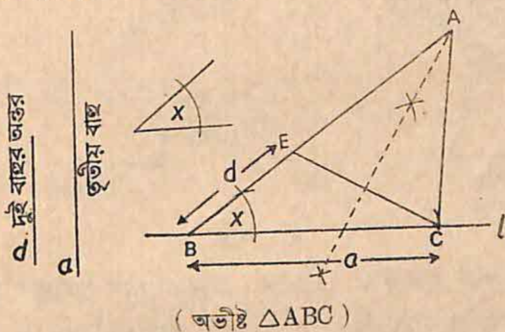
(iv) ত্রিভুজের দুটি বাহুর সমষ্টি এবং দুটি কোণ দেওয়া থাকলে ত্রিভুজ অঙ্কন।



(অভীষ্ট △ABC)
চিত্র—74

[ইংগিত : $PB = d$, $\angle QPB = \angle x$; PC, $\angle QPB$-এর সমদ্বিখণ্ডক। $\angle PBC = \angle y$, PC-এর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক এবং *l* রেখার ছেদবিন্দু A।]

(v) ত্রিভুজের দুই বাহুর অন্তর এবং তৃতীয় বাহু ও উহার সংলগ্ন একটি কোণ দেওয়া থাকলে ত্রিভুজ অঙ্কন।



(অভীষ্ট △ABC)

চিত্র—75

[ইংগিত : $BC = a$, $\angle CBE = \angle x$, $EB = d$, EC-এর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক এবং বর্ধিত BE-র ছেদবিন্দু A।]

অনুশীলনী—4B.

1. $\triangle ABC$ অঙ্কন কর, যখন $AB+BC=8$ সে.মি., $CA=5$ সে.মি., এবং $\angle ABC=60°$।

2. $\triangle ABC$ অঙ্কন কর যার পরিসীমা 10 সে.মি. এবং দুটি কোণ যথাক্রমে $50°$ এবং $48°$।

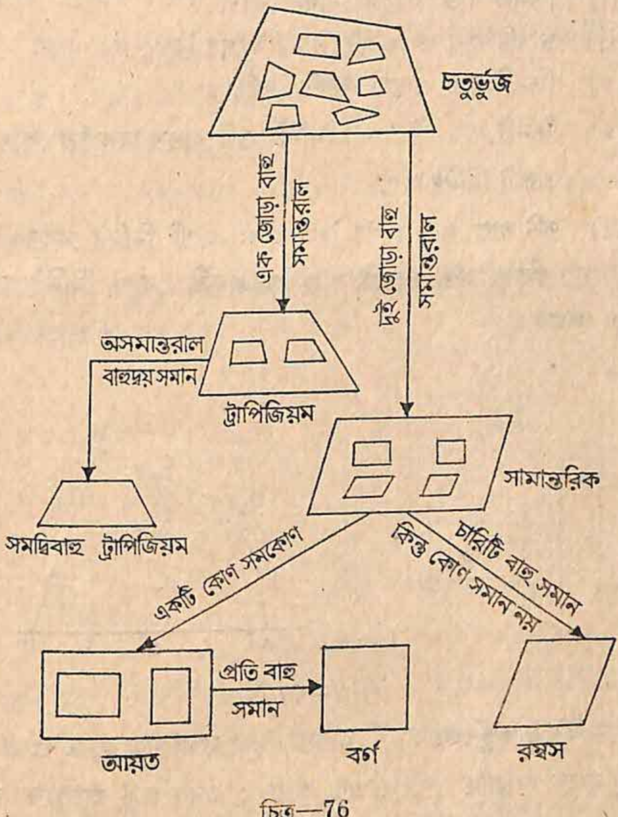
3. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন কর যার পরিসীমা 6·4 সে.মি. এবং অসমান বাহু সাপেক্ষে উচ্চতা 1·6 সে.মি.।

4. $\triangle ABC$ অঙ্কন কর, যখন $AB+AC=5{\cdot}6$ সে.মি, এবং AB বাহুসংলগ্ন কোণ দুটি যথাক্রমে $70°$ ও $60°$।

5. $\triangle ABC$ অঙ্কন কর, যখন $AB-AC=3$ সে.মি., $BC=7$ সে.মি, এবং $\angle ABC=35°$।

18. চতুর্ভুজ অঙ্কন :

চতুর্ভুজ অঙ্কনের পূর্বে নীচের চিত্র (চিত্র—76) দেখে বিভিন্ন আকারের চতুর্ভুজগুলির নাম জেনে নাও।



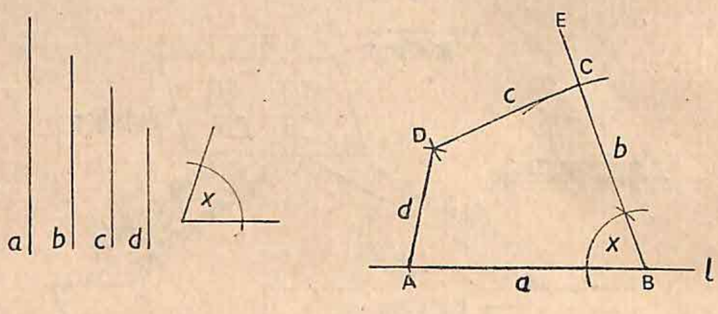
চিত্র—76

ত্রিভুজ অঙ্কনের সময় আমরা দেখেছি, ত্রিভুজের তিন বাহু ও তিন কোণের মধ্যে একটি বাহুসহ যে-কোন **তিনটি** জানলে নির্দিষ্ট ত্রিভুজটি আঁকা যায়। চতুর্ভুজের বেলায় কিন্তু যে কোন চারটি জানা থাকলে একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ আঁকা সম্ভব হবে না। নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ অঙ্কনে

চতুর্ভুজটির বাহু, কোণ, কর্ণ* ইত্যাদি নিয়ে অন্ততপক্ষে **পাঁচটি** জানা থাকা চাই। যেমন :

(i) চারটি বাহু ও একটি নির্দিষ্ট কোণ,
(ii) তিনটি বাহু ও দুটি নির্দিষ্ট কোণ,
(iii) চারটি বাহু ও একটি নির্দিষ্ট কর্ণের দৈর্ঘ্য,
(iv) তিনটি বাহু ও দুটি কর্ণের দৈর্ঘ্য,
(v) তিনটি বাহু, উহাদের নির্দিষ্ট দুটি বাহুর অন্তর্গত কোণ এবং একটি নির্দিষ্ট কর্ণ,
(vi) দুটি বাহু, দুটি কর্ণের দৈর্ঘ্য এবং একটি নির্দিষ্ট কোণ।

18. (i) চতুর্ভুজের চারটি বাহু ও একটি কোণ নির্দিষ্ট থাকলে চতুর্ভুজ অঙ্কন :



চিত্র—77

মনে কর, চতুর্ভুজের চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b, c, d এবং a ও b বাহুর অন্তর্গত $\angle x$ দেওয়া আছে ; চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন প্রণালী : একটি সরলরেখা l আঁক, তার থেকে a-এর সমান করে AB অংশ কেটে নাও (চিত্র—77)।

এখন B বিন্দুতে BA বাহুকে নির্দিষ্ট কোণের এক বাহু মনে করে

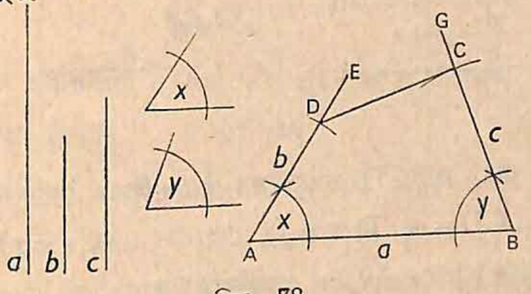
* কর্ণ : চতুর্ভুজের বিপরীত কৌণিক বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা।

$\angle x$-এর সমান করে $\angle$ABE আঁক। এখন b-এর সমান করে BE থেকে BC অংশ কেটে নাও। এবার C বিন্দুকে কেন্দ্র করে c-এর পরিমাণ ব্যাসার্ধ নিয়ে এবং A বিন্দুকে কেন্দ্র করে d-এর পরিমাণ ব্যাসার্ধ নিয়ে দুটি বৃত্তচাপ আঁক। মনে কর, বৃত্তচাপ দুটি D বিন্দুতে ছেদ করে। AD এবং CD যুক্ত কর।

ABCD অভীষ্ট চতুর্ভুজ।

লক্ষ্য কর, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ এবং $\angle ABC = \angle x$।

18. (ii) চতুর্ভুজের তিনটি বাহু ও দুটি নির্দিষ্ট কোণ দেওয়া থাকলে চতুর্ভুজ অঙ্কন :



চিত্র—78

মনে কর, তিনটি বাহু a, b, c এবং a ও b বাহুর অন্তর্ভুক্ত $\angle y$ এবং a ও c বাহুর অন্তর্ভুক্ত $\angle y$ দেওয়া আছে; চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

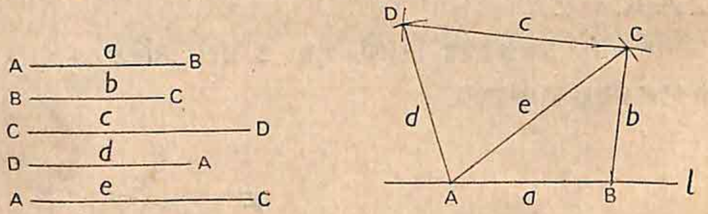
অঙ্কন প্রণালী : একটি রেখা l আঁক, তার থেকে a-এর সমান করে AB অংশ কেটে নাও (চিত্র—78)। A বিন্দুতে $\angle x$-এর সমান করে $\angle$BAE এবং B বিন্দুতে $\angle y$-এর সমান করে $\angle$ABG আঁক। AE থেকে b-এর সমান করে AD অংশ এবং BG থেকে c-এর সমান করে BC অংশ কেটে নিয়ে CD যুক্ত কর।

ABCD অভীষ্ট চতুর্ভুজ।

লক্ষ্য কর, $AB=a$, $AD=b$, $BC=c$, BA ও AD-এর অন্তর্গত $\angle DAB=\angle x$ এবং AB ও BC-এর অন্তর্গত $\angle ABC=\angle y$।

মনে করা যাক, a, b-এর অন্তর্গত এবং a, d-এর অন্তর্গত কোণ দুটি দেওয়া আছে, চতুর্ভুজটি কি করে আঁকবে নিজে এঁকে দেখ।

18. (iii) চতুর্ভুজের চারটি বাহু ও একটি নির্দিষ্ট কর্ণ দেওয়া থাকলে চতুর্ভুজ অঙ্কন ঃ



চিত্র—79

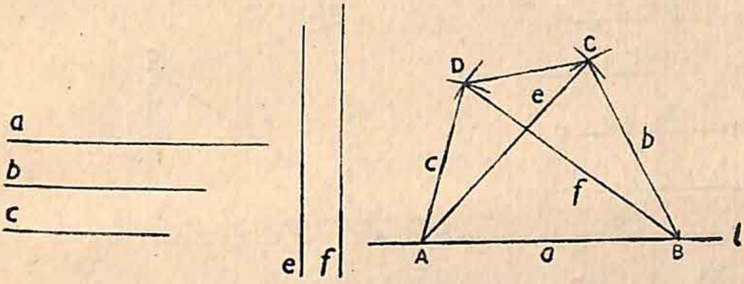
মনে কর, ABCD চতুর্ভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য ($AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$) এবং কর্ণ AC ($=e$)-এর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে (চিত্র—79)। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন প্রণালী ঃ একটি রেখা l নাও, তার থেকে a-এর সমান করে AB অংশ কেটে নাও (চিত্র—79)। A বিন্দুকে কেন্দ্র করে e-এর পরিমাণ ব্যাসার্ধ নিয়ে এবং B-কে কেন্দ্র করে b-এর পরিমাণ ব্যাসার্ধ নিয়ে দুটি বৃত্তচাপ আঁক। মনে কর, চাপ দুটি C বিন্দুতে ছেদ করল। এবার C বিন্দুকে কেন্দ্র করে c-এর পরিমাণ ব্যাসার্ধ নিয়ে এবং A-কে কেন্দ্র করে d-এর পরিমাণ ব্যাসার্ধ নিয়ে দুটি বৃত্তচাপ আঁক। মনে কর, চাপ দুটি D বিন্দুতে ছেদ করল। এখন BC, CD, DA যুক্ত কর।

ABCD অভীষ্ট চতুর্ভুজ।

মেপে দেখ, বাহু চারটি ও কর্ণটি প্রদত্ত দৈর্ঘ্য অনুযায়ী কিনা।

18. (iv) চতুর্ভুজের তিনটি বাহু ও দুটি কর্ণ দেওয়া থাকলে চতুর্ভুজ অঙ্কন :



চিত্র—80

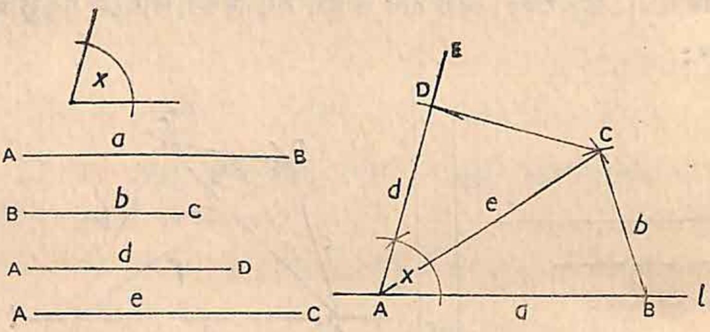
মনে কর, তিনটি বাহু a, b, c এবং দুটি কর্ণ e, f দেওয়া আছে, চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন প্রণালী : একটি রেখা l নাও, তার থেকে a-এর সমান করে AB অংশ কেটে নাও। এখন Aকে কেন্দ্র করে e-এর পরিমাণ ব্যাসার্ধ নিয়ে এবং Bকে কেন্দ্র করে b-এর পরিমাণ ব্যাসার্ধ নিয়ে দুটি বৃত্তচাপ আঁক। মনে কর, চাপ দুটি C বিন্দুতে ছেদ করে। আবার Aকে কেন্দ্র করে c-এর পরিমাণ ব্যাসার্ধ নিয়ে এবং Bকে কেন্দ্র করে f-এর পরিমাণ ব্যাসার্ধ নিয়ে দুটি বৃত্তচাপ আঁক। মনে কর, চাপ দুটি D বিন্দুতে ছেদ করে। এখন BC, CD, DA যুক্ত কর।

ABCD অভীষ্ট চতুর্ভুজ।

মেপে দেখ, বাহু তিনটি ও কর্ণ দুটি প্রদত্ত দৈর্ঘ্য অনুযায়ী আছে কি না।

18. (v) চতুর্ভুজের তিনটি বাহু, উহাদের নির্দিষ্ট দুটি বাহুর অন্তর্গত কোণ এবং একটি নির্দিষ্ট কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া থাকলে চতুর্ভুজ অঙ্কন :



চিত্র—81

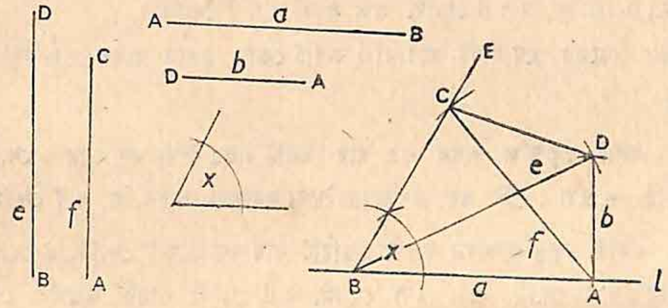
মনে কর, ABCD চতুর্ভুজের AB$(=a)$, BC$(=b)$, AD$(=d)$ বাহু তিনটি, কর্ণ AC $(=e)$ এবং $\angle$BAD $(=\angle x)$ দেওয়া আছে (চিত্র—81), চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন প্রণালী : একটি রেখা l নাও, তার থেকে a-এর সমান করে AB অংশ কেটে নাও (চিত্র—81)-A বিন্দুতে $\angle x$-এর সমান করে $\angle$BAE আঁক। AE থেকে d-এর সমান করে AD অংশ কেটে নাও, A বিন্দুকে কেন্দ্র করে e-এর পরিমাণ ব্যাসার্ধ নিয়ে এবং Bকে কেন্দ্র করে b-এর পরিমাণ ব্যাসার্ধ নিয়ে দুটি বৃত্তচাপ আঁক। মনে কর, চাপ দুটি C বিন্দুতে ছেদ করে। BC, CD যুক্ত কর।

ABCD অভীষ্ট চতুর্ভুজ।

মেপে দেখ, চতুর্ভুজের বাহু তিনটি, কর্ণ এবং নির্দিষ্ট কোণ প্রদত্ত সর্তানুযায়ী হয়েছে কি না।

(vi) চতুর্ভুজের দুটি বাহু, দুটি কর্ণের দৈর্ঘ্য এবং একটি নির্দিষ্ট কোণ দেওয়া থাকলে চতুর্ভুজ অঙ্কন :



চিত্র—82

মনে কর, ABCD চতুর্ভুজের দুটি বাহু AB $(=a)$, AD $(=b)$, দুটি কর্ণ BD $(=e)$, AC $(=f)$ এবং $\angle$ABC $(=\angle x)$ দেওয়া আছে (চিত্র—82), চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন প্রণালী : একটি সরলরেখা l নাও, তার থেকে a-এর সমান করে AB অংশ কেটে নাও (চিত্র—82)। B বিন্দুতে $\angle x$-এর সমান করে $\angle$ABE অঙ্কন কর। Bকে কেন্দ্র করে e-পরিমাণ ব্যাসার্ধ নিয়ে এবং A-কে কেন্দ্র করে b-পরিমাণ ব্যাসার্ধ নিয়ে দুটি বৃত্তচাপ আঁক। মনে কর, চাপ দুটি D বিন্দুতে ছেদ করে। এবার A-কে কেন্দ্র করে f-এর পরিমাণ ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁক যাতে চাপটি BEকে C বিন্দুতে ছেদ করে, এখন AD ও DC যুক্ত কর।

ABCD অভীষ্ট চতুর্ভুজ।

মেপে দেখ, চতুর্ভুজের দুটি বাহু, দুটি কর্ণ এবং নির্দিষ্ট কোণ প্রদত্ত সর্তানুযায়ী হয়েছে কি না।

অনুশীলনী—4C.

1. একটি চতুর্ভুজ অঙ্কন কর যার বাহুগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সে.মি., 4 সে.মি., 5 সে.মি., এবং 6 সে.মি. এবং একটি কর্ণ 7 সে.মি.।

[চিত্র অঙ্কনের পূর্বে নির্ণয় করে নাও কর্ণটি কোন্ কোন্ বাহুর ছেদবিন্দুগামী হবে।]

2. একটি চতুর্ভুজ অঙ্কন কর যার তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 সে.মি., 3·2 সে.মি., ও 2·5 সে.মি. এবং কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 8 সে.মি. ও 7 সে.মি.।

3. একটি চতুর্ভুজ অঙ্কন কর যার চারটি বাহু যথাক্রমে 7 সে.মি., 6 সে.মি., 4·5 সে.মি., 2·5 সে.মি. এবং 4·5 সে.মি. ও 6 সে.মি. বাহুর অন্তর্গত কোণ 110°-র সমান।

4. একটি চতুর্ভুজ অঙ্কন কর যার তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6·5 সে.মি., 3 সে.মি 2·5 সে.মি.; প্রথম দুই বাহুর ছেদবিন্দুগামী কর্ণের দৈর্ঘ্য 6 সে.মি. এবং এই দুই বাহুর অন্তর্গত কোণ 120°-র সমান।

5. একটি চতুর্ভুজ অঙ্কন কর, যার দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 2·5 সে.মি., 3 সে.মি.; এদের অন্তর্গত কোণের পরিমাণ 110° এবং কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 5 সে.মি. ও 6 সে.মি.।